① (1) $_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = \frac{\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}\cdot 3}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = \underline{15}$

(2) $_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = \frac{7\cdot\overset{3}{\cancel{6}}}{\cancel{2}} \cdot \frac{5\cdot\cancel{4}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \underline{105}$

(3) 選び方は $_8C_7 = 8$ 通り.

3組の分け方は (2)より 105通り

A, Bがともにえらばれるのは $_2C_2 \times {}_6C_5 = 6$ 通り.

3組に分け、ABが同じ組になるのは.

2人の組になるとき $_2C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 10$ 通り

3人 〃 $_2C_2 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 5 \times 6 \times \frac{1}{2} = 15$ 通り

以上より、もとめる確率を p として、

$$p = \frac{6 \times (10 + 15)}{8 \times 105} = \frac{3 \times 5}{4 \times 21} = \underline{\frac{5}{28}}$$

② $C_1 : y=\log(2x)=\log x+\log 2 = f(x)$ とおく.

$C_2 : y = 2\log x = g(x)$ とおく.

(1) $f'(x)=\frac{1}{x}$, $g'(x)=\frac{2}{x}$

l と C_1 の接点を $(\alpha, f(\alpha))$ とおくと l は $y=\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)+\log\alpha+\log 2$

$=\frac{1}{\alpha}x+\log\alpha+\log 2-1$ …①

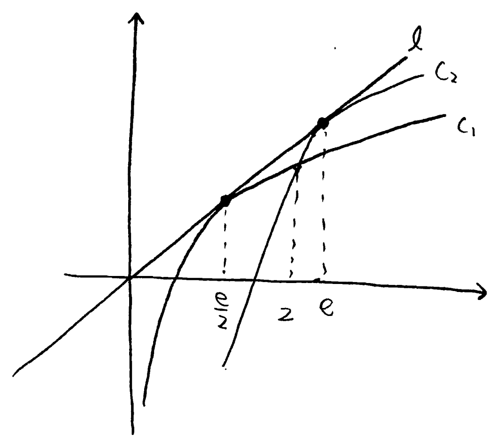
l と C_2 の接点を $(\beta, f(\beta))$ とおくと l は $y=\frac{2}{\beta}x+2\log\beta-2$ …②

①と②は一致するので $\frac{1}{\alpha}=\frac{2}{\beta}$, $\log\alpha+\log 2-1=2\log\beta-2$.

連立して $\log\alpha = 1-\log 2 = \log\frac{e}{2}$

$\alpha=\frac{e}{2}$, $\beta=e$

よって l は $\underline{y=\frac{2}{e}x}$ //



(2) C_1 と C_2 の交点は.

$\log 2x = \log x^2$ より

$x=2$

よってもとめる面積 S は

$$S=\int_{\frac{e}{2}}^{2} \frac{2}{e}x-\log 2x\,dx + \int_{2}^{e}\frac{2}{e}x-2\log x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{e}\cdot x^2 - x\log x + x - x\log 2\right]_{\frac{e}{2}}^{2} + \left[\frac{1}{e}x^2-2x\log x+2x\right]_{2}^{e}$$

$$=\frac{4}{e}-2\log 2+2-2\log 2-\left(\frac{e}{4}-\frac{e}{2}\log\frac{e}{2}-\frac{e}{2}\log 2\right)+e-2e+2e-\frac{4}{e}+4\log 2-4$$

$$=\frac{3}{4}e-2$$

③

(1) 直線ACは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

これと $z=t$ との交点は $\sqrt{2}\alpha = t$ より $\alpha = \frac{t}{\sqrt{2}}$ だから

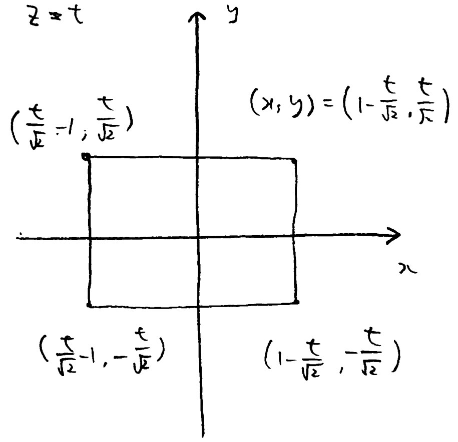
$$(x, y, z) = \underline{\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}+1,\ \frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)}$$

(2) BC, AD, BD と $z=t$ の交点は

(1)と同様にもとめると

$\left(\frac{t}{\sqrt{2}}-1,\ \frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right), \left(1-\frac{t}{\sqrt{2}},\ -\frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$

$,\ \left(\frac{t}{\sqrt{2}}-1,\ -\frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$



で、四面体ABCDの $z=t$ による断面は

右のようになる。

したがって回転体の断面は、半径 $\sqrt{\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}$ の円となるので、

もとめる体積は

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} \pi\left\{\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right\} dt$$

$$= \pi\int_0^{\sqrt{2}} t^2-\sqrt{2}t+1\, dt$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+t\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \pi\left(\frac{1}{3}2\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

④ (1)

$$\begin{cases} z_{2n+1} - z_{2n} = \alpha(z_{2n} - z_{2n-1}) & \cdots ① \\ z_{2n+2} - z_{2n+1} = \bar{\alpha}(z_{2n+1} - z_{2n}) & \cdots ② \end{cases}$$

① + ②

$$z_{2n+2} - z_{2n} = \bar{\alpha} z_{2n+1} - \bar{\alpha} z_{2n} + \alpha z_{2n} - \alpha z_{2n-1} \quad \cdots ③$$

② より

$$z_{2n} - z_{2n-1} = \bar{\alpha}(z_{2n-1} - z_{2n-2}) \cdots ②' \qquad (n \geqq 2)$$

$① \times \bar{\alpha} + ②' \times \alpha$

$$\bar{\alpha} z_{2n+1} - \bar{\alpha} z_{2n} + \alpha z_{2n} - \alpha z_{2n-1} = |\alpha|^2 (z_{2n} - z_{2n-2}) \cdots ④$$

③ + ④

$$z_{2n+2} - z_{2n} = |\alpha|^2 (z_{2n} - z_{2n-2}) \quad (n \geqq 2).$$

証明終.

(2)

$z_{2n+2} - z_{2n} = 0$ とすると (1) の結果より $z_{2n} - z_{2n-2} = 0$

以下同様に考えて $z_{2n+2} = z_{2n} = z_{2n-2} = \cdots z_2$ となり、これは.

$z_2, z_4, z_6 \ldots$ が全て同一直線上にあることを示している.

$z_{2n+2} - z_{2n} \neq 0$ のとき (1) より

$$\frac{z_{2n+2} - z_{2n}}{z_{2n} - z_{2n-2}} = |\alpha|^2$$

となるが、この式の右辺は正の実数だから左辺も正の実数で、これは

$z_{2n+2} - z_{2n}$ と $z_{2n} - z_{2n-2}$ の偏角が 0° であることを示しており

$z_{2n+2}, z_{2n}, z_{2n-2}$ は一直線上にあることを示している.

以下同様に考えれば $z_2, z_4, z_6 \ldots$ は一直線上であることが示される.

① より $z_{2n+3} - z_{2n+2} = \alpha z_{2n+2} - \alpha z_{2n+1} \quad \cdots ①'$

$①' + ②$ $\quad z_{2n+3} - z_{2n+1} = \alpha z_{2n+2} - \alpha z_{2n+1} + \bar{\alpha} z_{2n+1} - \bar{\alpha} z_{2n} \cdots ⑤$

$⑤ + ② \times \alpha + ① \times \bar{\alpha}$

$$z_{2n+3} - z_{2n+1} = |\alpha|^2 (z_{2n+1} - z_{2n-1}) \cdots ⑥$$

⑥ について

$z_{2n+3} - z_{2n+1} = 0$ のとき

$z_{2n+3} = z_{2n+1} = z_{2n-1} = \cdots = z_1$ となるので

$z_1, z_3, z_5 \ldots$ は一直線上にある

$z_{2n+3} - z_{2n+1} \neq 0$ のとき.

$$\frac{z_{2n+3} - z_{2n+1}}{z_{2n+1} - z_{2n-1}} = |\alpha|^2$$

これは z_{2n+3}, z_{2n+1}, z_{2n-1} が一直線上にあることを示しており

$$\frac{z_{2n+3} - z_{2n+1}}{z_{2n+1} - z_{2n-1}} = \frac{z_{2n+1} - z_{2n-1}}{z_{2n-1} - z_{2n-3}} = \cdots = \frac{z_5 - z_3}{z_3 - z_1} = |\alpha|^2 \quad \cdots ⑦$$

となるので $z_1, z_3, z_5 \ldots$ は全て一直線上にある.　　　証明終

(3) $z_3 - z_2 = \alpha(z_2 - z_1)$ より　$z_3 = \alpha + 1$

ここで $|\alpha| > 0$ だから $\alpha \neq 1$　よって $z_3 \neq 0$　つまり $z_1 \neq z_3$.

$z_3 - z_1 = \alpha - 1$ と ⑦ より

$$z_{2n+1} - z_{2n-1} = \{|\alpha|^2\}^{n-1}(z_3 - z_1) = (\alpha+1)|\alpha|^{2(n-1)}$$

$$z_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha+1)|\alpha|^{2(k-1)} + z_1$$

$$= (\alpha+1) \times \frac{1 - |\alpha|^{2(n-1)}}{1 - |\alpha|^2} \longrightarrow \frac{\alpha+1}{1-|\alpha|^2}$$

$z_4 - z_3 = \bar{\alpha}(z_3 - z_2)$ より　$z_4 = \bar{\alpha}(\alpha + 1 - 1) + \alpha + 1 = |\alpha|^2 + \alpha + 1$

$|\alpha|^2 + \alpha + 1 = 1$ とすると　$\alpha(\bar{\alpha} + 1) = 0 \iff \alpha = 0$ または $\alpha = -1$ となり

$0 < |\alpha| < 1$ に矛盾するので　$z_4 \neq z_2$

(1)の結果より　$z_{2n+2} - z_{2n} = \{|\alpha|^2\}^{n-1}(z_4 - z_2) = |\alpha|^{2n-2}(|\alpha|^2 + \alpha)$

$$z_{2n+2} = (|\alpha|^2 + \alpha)\frac{1 - |\alpha|^{2n-2}}{1 - |\alpha|^2} + z_2 \rightarrow \frac{|\alpha|^2 + \alpha}{1 - |\alpha|^2} + 1$$

$$= \frac{\alpha + 1}{1 - |\alpha|^2}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|z_{2n+1}-w\right|=0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|z_{2n+2}-w\right|=0$

となるのは $w=\dfrac{\alpha+1}{1-|\alpha|^2}$ のときである