①

(1) $a_2 = \dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+1}+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan\dfrac{\pi}{6}$

$a_3 = \dfrac{a_2}{\sqrt{a_2^2+1}+1} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} = \dfrac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3)}{3} = 2-\sqrt{3}$

また $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan 2\times\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}$ より.

$(1-\tan^2\dfrac{\pi}{12})\times\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 2\tan\dfrac{\pi}{12}$

$\Leftrightarrow \tan^2\dfrac{\pi}{12} + 2\sqrt{3}\tan\dfrac{\pi}{12} - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan\dfrac{\pi}{12} = -\sqrt{3}+\sqrt{3+1} = 2-\sqrt{3}$ $(\because \tan\frac{\pi}{12} > 0)$

よって $a_3 = \tan\dfrac{\pi}{12}$

(2) $a_1 \sim a_3$ より $a_n = \tan\dfrac{\pi}{3\times 2^{n-1}}$ と推定できる (これを命題Pと呼ぶことにする)

(i) $n=1$のとき

$a_1 = \tan\dfrac{\pi}{3\times 2^0}$ と表されるので命題Pは成り立っている.

(ii) $n=k$

$a_k = \tan\dfrac{\pi}{3\times 2^{k-1}}$ が成り立つと仮定する

このとき

$\theta = \dfrac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}$ として

$a_{k+1} = \dfrac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}+1} = \dfrac{\tan\theta}{\frac{1}{\cos\theta}+1} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}$

$= \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\dfrac{\theta}{2} = \tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^k}$

となるので Pは $n=k+1$においても成り立つ.

(i)(ii)より、数学的帰納法によって命題Pが全ての自然数nについて成り立つことが示された.

証明終

(3) $\lim_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim_{n\to\infty} 2^n \times \dfrac{\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}{\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}{\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}\times\dfrac{2\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}} = \dfrac{2\pi}{3}$

① (1) $a_2 = \dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+1}+1} = \dfrac{\tan\frac{\pi}{3}}{\sqrt{\tan^2\frac{\pi}{3}+1}+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan\dfrac{\pi}{6}$

$a_3 = \dfrac{a_2}{\sqrt{a_2^2+1}+1} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}+1}+1} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+1} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

また $\tan\dfrac{\pi}{6} = \tan 2\cdot\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\tan^2\dfrac{\pi}{12}\right) = 2\tan\dfrac{\pi}{12}$

$\Leftrightarrow \quad \tan^2\dfrac{\pi}{12} + 2\sqrt{3}\tan\dfrac{\pi}{12} - 1 = 0$

$\tan\dfrac{\pi}{12} = -\sqrt{3} \pm \sqrt{\sqrt{3}^2+1} = -\sqrt{3} \pm 2$

ここで $\tan\dfrac{\pi}{12}$ は正の値をとるので $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$. $= a_3$

以上より $a_2 = \tan\dfrac{\pi}{6}$, $a_3 = \tan\dfrac{\pi}{12}$ が示された.

(2) (1)の結果より $a_n = \tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$ であると推定できる。(これを命題とする)

(i) $n=1$ のとき. $a_1 = \tan\frac{\pi}{3}$ だから. 命題は $n=1$ のとき正しい

(ii) $n=k$ のとき $a_k = \tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}$ が成り立つと仮定する.

このとき

$$a_{k+1} = \frac{\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}}{\sqrt{\tan^2\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}+1}+1}$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}}}+1}$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}}{1+\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{k}}\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{k}}}{2\cos^2\frac{1}{3\cdot 2^{k}}}$$

$$= \tan\frac{1}{3\cdot 2^{k}}$$

よって $n=k$ のとき 命題が成り立つと仮定すれば、$n=k+1$ のときも命題は

成り立つことが分かる

(i)(ii)より、数学的帰納法によって命題「$a_n = \tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$」が全ての n について成り立つことが示された。

証明終

(3) $\lim_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim_{n\to\infty} 2^n \tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}{\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}} \times \frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}} \times 2^n \times \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}{\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}} \times \frac{2}{3}\pi \times \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}\right)$$

$$= 1 \times \frac{2}{3}\pi \times \frac{1}{1}$$

$$= \frac{2}{3}\pi$$

②

(1) $f(t)=t^3-2at+1 \quad (t \geqq 0)$

$f'(t)=3t^2-2a$

$f'(t)=0$ となるのは $t=\sqrt{\frac{2a}{3}}$ のとき $(\because t>0)$

なので $f(t)$ の増減は右のようになる.

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2a}{3}}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(t)$	/	$\searrow$		$\nearrow$

$t=\sqrt{\frac{2a}{3}}$ のとき $f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)=\frac{2a\sqrt{2a}}{3\sqrt{3}}-2a\times\sqrt{\frac{2a}{3}}+1=\frac{-4a\sqrt{6a}}{9}+1$

$f(t)$ の $t \geqq 0$ における最小値は $\frac{9-4a\sqrt{6a}}{9}$ $\left(t=\sqrt{\frac{2a}{3}}\text{ のとき}\right)$

(2) 最小値が 0 となるとき, $a=A$ となるので

$$9-4A\sqrt{6A}=0$$

これを整理して. $A^3=\frac{27}{32}$

(3) $C_1: y=x^4$, $C_2: x^2+(y-a)^2=a^2$

2つの式を連立する.

$$x^2+x^8-2ax^4=0$$

$$x^2(x^6-2ax^2+1)=0 \quad \cdots ①$$

①において $x=0$ は ①の解である.

$x \neq 0$ のとき, $x^2=t$ とおく $(t>0)$.

このとき ① は

$$t^3-2at+1=0 \quad (t>0)$$

となるが, この式の左辺は $f(t)$ であり. (1), (2) より

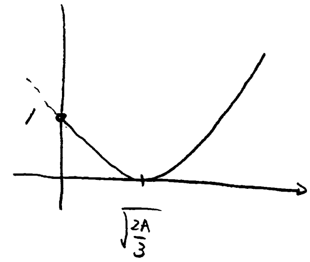
(i) $a>A$ のとき $f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)<0$ となるので $f(t)=0$ は $t>0$ で 2つの解をもつ.

1つの t につき, x は 2つ存在するので, $x=0$ と あわせて, 5つの解をもつ.

(ii) $a<A$ のとき, $f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)>0$ となるので. $f(t)=0$ は $t>0$ で解をもたず

①は $x=0$ のみを解にもつ.

(iii) $a=A$ のとき $f\left(\sqrt{\frac{2A}{3}}\right)=0$ となるので.

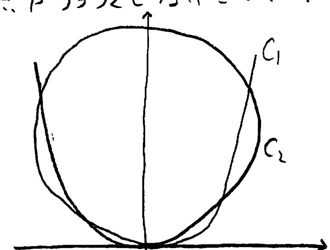


$f(t)=0$ は $t>0$ において 1つの重解をもつ.
1つの t に対して x が 2つ 存在するので. $x=0$ と、あわせて. ① は 3つの解をもつ

以上をまとめて、

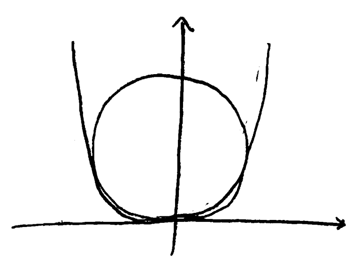
$$\begin{cases} a>\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}} \text{ のとき} & \text{交点は 5つ} \\ a=\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}} \text{ のとき} & \text{交点は 3つ} \\ 0<a<\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}} \text{ のとき} & \text{交点は 1つ.} \end{cases}$$

(4) P と $(0, a)$ との距離が a となるのは. P が C_2 上にあるときで. これが.
最小となるのは. C_1 上の点で C_2 の内側にある点が存在しないことである.



$a>\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}$ のとき、交点は 5つあり. このときの
グラフは右のようになっているので. 円の内側
に C_1 がはいりこんでいる

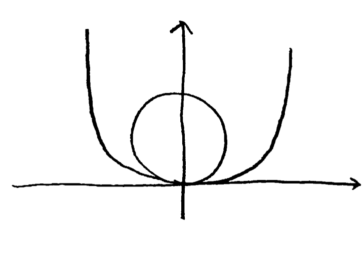
$a=\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}$ のときは 右中図, $a<\dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}$ の
ときは 右下図のようになるので、いずれも
C_1 は C_2 の内側にはいりこんでいない.



よって P と $(0, a)$ との距離の最小値が
a となるのは

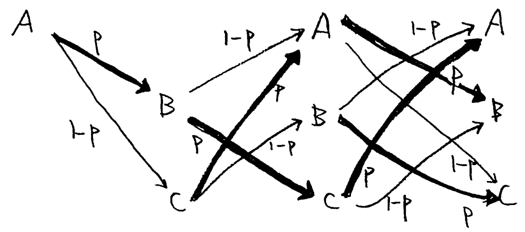
$$0<a\leqq\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}$$

のときである.



③

(1) 最初　　1回移動　　2回移動　　3回移動



上図より　$p_2 = p\times(1-p) + (1-p)\times p = 2p(1-p)$

$p_3 = (1-p)\times(1-p)\times(1-p) + p\times p\times p = 1-3p+3p^2$

(2) $2m$回目に初めてAに戻るのは

① $A \to \overset{1}{B} \to \overset{2}{C} \to \overset{3}{B} \to \overset{4}{C} \to \cdots\cdots \to \overset{2m-3}{B} \to \overset{2m-2}{C} \to \overset{2m-1}{B} \to A$

② $A \to C \to B \to C \to B \to \cdots\cdots \to C \to B \to C \to A$

の2つの場合が考えられる.

$p_{2m} = p\times\{p\times(1-p)\}^{m-1}\times(1-p) + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}p = \underline{2p^m(1-p)^m}$

$2m+1$回目に初めてAに戻るのは

③ $A \to \overset{1}{B} \to \overset{2}{C} \to \overset{3}{B} \to \overset{4}{C} \to \cdots\cdots \to \overset{2m-3}{B} \to \overset{2m-2}{C} \to \overset{2m-1}{B} \to \overset{2m}{C} \to \overset{2m+1}{A}$

④ $A \to C \to B \to C \to B \to \cdots \to C \to B \to C \to B \to A$

の2つの場合が考えられる

$p_{2m+1} = p\times\{p(1-p)\}^{m-1}\times p\times p + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}(1-p)(1-p)$

$= \underline{p^{m-1}(1-p)^{m-1}(1-3p+3p^2)}$

(3) $p=\frac{1}{2}$のとき　$p_{2m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}$, $p_{2m+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$, $p_2 = \frac{1}{2}$, $p_3 = 1-\frac{3}{2}+\frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

となるので　$p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　$(n \geqq 2)$

n回目に最初にAに戻り $2N+3$回目に2度目にAに戻るとすると.

その確率は(これをq_nとする)　　(nは $2 \leqq n \leqq 2N+1$ とする)

$$q_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(2N+3-n)-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}$$

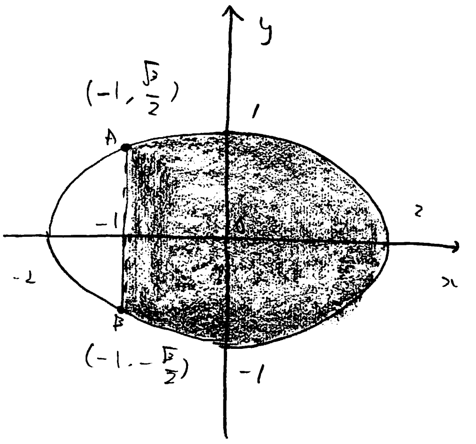
よって

$$Q = \sum_{k=2}^{2N+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} = 2N\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} = \underline{\frac{N}{2^{2N}}}_{\,\prime\prime}$$

④

(1)

$$2\int_{-1}^{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = \int_{-1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = (*)$$



$x = 2\sin\theta$ とすると $\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$,

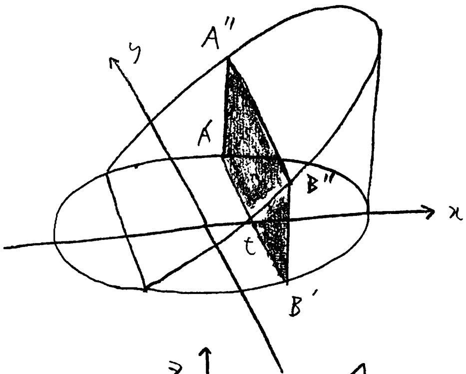
x	$-1 \to 2$
θ	$-\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{2}$

となるので

$$(*) = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\, d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos 2\theta\, d\theta = 2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \underline{\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2) 右のように A', B', A'', B'' を定める



$x = t$ のとき A' の y 座標は、C の式より

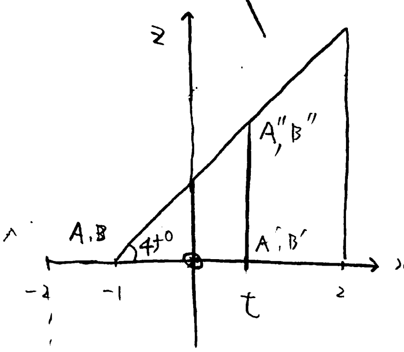
$$y = \sqrt{1-\frac{t^2}{4}}$$

よって $A'B' = 2\sqrt{1-\frac{t^2}{4}} = \sqrt{4-t^2}$

右下図より $A'A'' = B'B'' = t-(-1) = t+1$

したがって

$$\underline{S(t) = (t+1)\sqrt{4-t^2}}$$



(3)

$$V = \int_{-1}^{2}(t+1)\sqrt{4-t^2}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{2} t\sqrt{4-t^2}\,dt + \int_{-1}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(4-t^2)'\sqrt{4-t^2}\,dt + \int_{-1}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{2} + \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi}$$

⑤

(1) $P(a, b)$ とおく. a, b は整数.

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA} = 6$ より. $50a + 14b = 6 \Leftrightarrow 25a + 7b = 3$.

これを満たす(a, b)として、$(a, b) = (-1, 4)$ が考えられる. $(-1, 4)$.

(2) (1)より. Pを(a, b)と表すと. $25a + 7b = 3$が成り立っている.

$$\begin{array}{rl} & 25a + 7b = 3 \\ -) & 25(-1) + 7\times 4 = 3 \\ \hline & 25(a+1) = -7(b-4) \end{array}$$

上式の左辺は25の倍数, 右辺は7の倍数で. 25と7は互いに素なので.

$$25(a+1) = -7(b-4) = 25\times 7\times k.$$

と表すことができる (kは整数)

これより. $a = 7k - 1,\ b = 4 - 25k$ . . . ①

OPの長さをL_kとすると

$$L_k^2 = (7k-1)^2 + (4-25k)^2 = 674k^2 - 214k + 17$$

$$= 674\left(k - \frac{107}{674}\right)^2 + 17 - \frac{107^2}{674}$$

kは整数だから. L_kが最小となるのはkが$\frac{107}{674}$に近いときで.

最も近いのは$k=0$, 次に近いのは$k=1$. のときで. このときのPは、それぞれ.

$k=0$のとき $(-1, 4)$. $k=1$のとき $(6, -21)$

$\underline{P_1(-1, 4),\ P_2(6, -21)}$ //

(3) (2)より

2m番目に近いのは ①で $k = m$のとき. $P_{2m}(7m-1, 4-25m)$

2m+1 〃 ①で $k = -m$のとき $P_{2m+1}(-7m-1, 4+25m)$

$$\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}} = \overrightarrow{OP_{2k+1}} - \overrightarrow{OP_{2k}} = (-7k-1, 4+25k) - (7k-1, 4-25k)$$

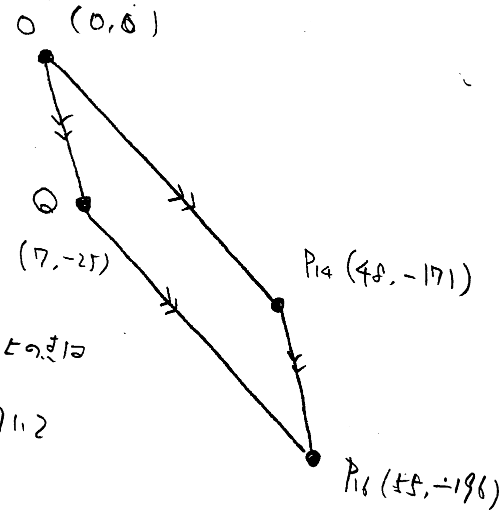
$$= \underline{(-14k, 50k)}$$ //

$$\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+2}} = (7(k+1)-1,\ 4-25(k+1)) - (7k-1,\ 4-25k)$$
$$= \underline{(7,\ -25)}$$

(4) $P_{14} = (7\times7-1,\ 4-25\times7) = (48,\ -171)$

$P_{16} = (7\times8-1,\ 4-25\times8) = (55,\ -196)$

$\overrightarrow{OQ} = (7,\ -25)$



$OQP_{16}P_{14}$ は平行四辺形で、その内部および周上の点は $0 \leqq t \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq 1$ を満たす (s, t) を用いて

$$s\begin{pmatrix}48\\-171\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}7\\-25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}48s+7t\\-171s-25t\end{pmatrix} \quad \cdots ②$$

と表すことができる。

これが格子点となっているとき

$$48s+7t = c,\quad -171s-25t = d \qquad (c, d\text{は整数})$$

$$48\times25s + 7\times25t = 25c$$
$$+)\ -171\times7s - 7\times25t = 7d$$
$$3s = 25c+7d$$

$$s = \frac{25c+7d}{3}, \quad t = -57c-16d$$

$0 \leqq s \leqq 1$ より、$s = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ に限られる

また $0 \leqq t \leqq 1$ より $t = 0$ または 1

したがって (s, t) の組みは $4\times2 = 8$通り

よって求める格子点は 8個で、

$(0,0), (16,-57), (32,-114), (48,-171), (7,-25), (23,-82)$
$, (39,-139), (55,-196)$