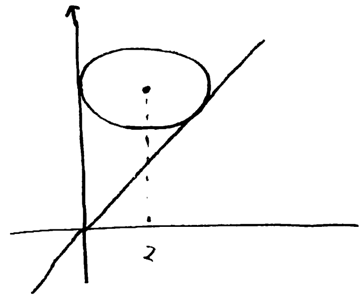
①



(1) y軸と接するので、だ円の中心のx座標は2である。したがってaは2である。

このとき、だ円は、

$$\frac{(x-2)^2}{4}+(y-b)^2=1$$

これが $y=x$ と接するので、

$$\frac{(x-2)^2}{4}+(x-b)^2=1$$

は重解をもつ。整理すると

$$5x^2-4x-8bx+4b^2=0$$

この判別式をDとするとD=0となるので

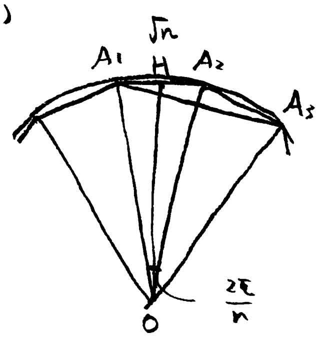
$$D/4=(2+4b)^2-5\cdot 4b^2=0$$

$$b=2\pm\sqrt{5}$$

$b>0$ なので $b=2+\sqrt{5}$.

$\therefore\ a=2,\ b=2+\sqrt{5}$

(2)



正n角形の中心をOとする。

$$\angle A_1OA_2=\frac{2\pi}{n}$$

A_1A_2 の中点をHとすると

$$\angle A_1OH=\frac{1}{2}\angle A_1OA_2=\frac{\pi}{n}.$$

$$\therefore\quad OA_1=A_1H\times\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{\sqrt{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$\triangle OA_1A_2=\frac{1}{2}OA_1^2\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{n}{8\sin^2\frac{\pi}{n}}\times\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\triangle OA_1A_3=\frac{1}{2}OA_1^2\sin\frac{4\pi}{n}=\frac{n}{8\sin^2\frac{\pi}{n}}\sin\frac{4\pi}{n}$$

$$\triangle A_1A_2A_3=2\triangle OA_1A_2-\triangle OA_1A_3$$

$$=\frac{n}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}\sin\frac{2\pi}{n}-\frac{n}{8\sin^2\frac{\pi}{n}}\sin\frac{4\pi}{n}=S_n$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}\left(\sin\frac{2\pi}{n}-\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}\right)\right\}$$

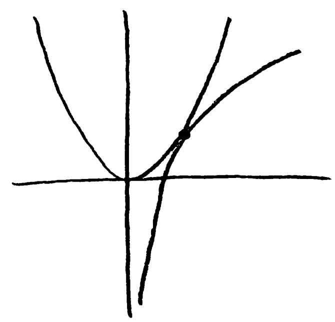
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \times \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{\sin^2\frac{\pi}{n}} \times \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \times \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times n}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2} \times \left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\right)^2 \times \left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\right) \times \frac{n^2}{\pi} \times \frac{\sin^2\frac{2\pi}{n}}{1+\cos\frac{2\pi}{n}} \times \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\right)^2 \times \left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\right)^3 \times 4\pi \times \frac{1}{1+\cos\frac{2\pi}{n}}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times 1^3 \times 4\pi \times \frac{1}{1+1} = \underline{\pi}$$

(3)



共有点のx座標をtとする。

$\frac{1}{2a^2}x^2 = f(x)$, $\log x + b = g(x)$ とすると、

$y=f(x)$と $y=g(x)$ が $x=t$のときに

接する条件は

$$f(t) = g(t) \iff \frac{1}{2a^2}t^2 = \log t + b$$

$$f'(t) = g'(t) \iff \frac{1}{a^2}t = \frac{1}{t}$$

2つ目の式から $t = a$ $(\because a>0,\ t>0)$

このとき 1つ目の式から

$$\frac{1}{2} = \log a + b \qquad b = \frac{1}{2} - \log a$$

$t = a$のとき、 $f(a) = \frac{1}{2}$ なので

$$\underline{P\left(a, \frac{1}{2}\right),\quad b = \frac{1}{2} - \log a}$$

(4).

$$f(x) = \int_1^2 \frac{|t-x|}{t^2}\,dt = \int_1^x \frac{x-t}{t^2}\,dt + \int_x^2 \frac{t-x}{t^2}\,dt$$

$$= \int_x^1 \frac{1}{t} - \frac{x}{t^2}\,dt + \int_x^2 \frac{1}{t} - \frac{x}{t^2}\,dt = \left[\log t + \frac{x}{t}\right]_x^1 + \left[\log t + \frac{x}{t}\right]_x^2$$

$$= x + \log 2 + \frac{x}{2} - (\log x + 1)\times 2 = \frac{3}{2}x - 2\log x + \log 2 - 2.$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{x} = \frac{3x-4}{2x}$$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{4}{3}$ のとき.

$f(x)$ の増減は下の通り.

x	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって $f(x)$ を最小にする x は $\underline{\frac{4}{3}}$

②

(1) 数学的帰納法で示す.

(i) $n=0$ のとき

$x_0 = 1$ なので $0 < x_0 \leqq 1$

(ii) $n=k$ のとき（kは負でない整数）

$0 < x_k \leqq 1$ と仮定する

このとき、

$f(x_k) = \frac{1}{2}x_k$ だから $0 < f(x_k) \leqq \frac{1}{2} \leqq 1$

$g(x_k) = x_k$ だから $0 < g(x_k) \leqq 1$

$h(x) = \frac{x_k+1}{2}$ だから、$0 < \frac{1}{2} < h(x) \leqq 1$

よって、硬貨の表裏の出方にかかわらず $0 < x_{k+1} \leqq 1$ が成り立つ。

(i)(ii)より、$n \geqq 0$ を満たす整数 n について、$0 < x_n \leqq 1$ が成立する

よって すべての自然数nに対して $0 < x_n \leqq 1$ が成立する。

(2)

(i) 2枚とも表になるとき、… $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

このとき、$x_1 = \frac{1}{2}x_0 = \frac{1}{2}$

(ii) 1枚が表、1枚が裏になるとき … $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2$.

このとき $x_1 = g(x_0) = x_0 = 1$

(iii) 2枚とも裏になるとき … $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

このとき、$x_1 = h(x_0) = \frac{1+1}{2} = 1$

以上より $\underline{p_1 = 0,\quad q_1 = \frac{1}{4},\quad r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}}$

(3) (i) 2枚とも表になるとき、 $\left(x_n = \frac{1}{2}x_{n-1}\right)$

$0 < x_{n-1} \leqq \frac{2}{3}$ ならば $0 < x_n \leqq \frac{1}{3}$

$\frac{2}{3} < x_{n-1} \leqq 1$ 〃 $\frac{1}{3} < x_n \leqq \frac{1}{2} \leqq \frac{2}{3}$

(ii) 表1枚，裏1枚

このとき $x_n = x_{n-1}$

(iii) 2枚とも裏.

$0 < x_{n-1} \leqq \frac{1}{3}$ のとき　$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_{n-1}$ なので　$\frac{1}{2} < x_n \leqq \frac{2}{3}$

$\frac{1}{3} < x_{n-1} \leqq 1$ のとき　$\frac{2}{3} < x_n \leqq 1$

以上より

$$\begin{cases} p_n = \frac{1}{4} \times (p_{n-1} + q_{n-1}) + \frac{1}{2}p_{n-1} = \frac{3}{4}p_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-1} \\ q_n = \frac{1}{4} \times r_{n-1} + \frac{1}{2} \times q_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-1} = \frac{1}{4}p_{n-1} + \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{4}r_{n-1} \\ r_n = \frac{1}{2} \times r_{n-1} + \frac{1}{4}(q_{n-1} + r_{n-1}) = \frac{1}{4}q_{n-1} + \frac{3}{4}r_{n-1} \end{cases}$$ //

(4) $p_n - r_n = \frac{3}{4}p_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-1} - \left(\frac{1}{4}q_{n-1} + \frac{3}{4}r_{n-1}\right) = \frac{3}{4}(p_{n-1} - r_{n-1})$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^2 (p_{n-2} - r_{n-2}) = \cdots = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}(p_1 - r_1) = \underline{-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$ //

(5) $p_n + r_n - q_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}r_{n-1}$

$q_n = 1 - p_n - r_n$ を代入.

$p_n + r_n = \frac{1}{4}(p_{n-1} + r_{n-1}) + \frac{1}{2}$

$p_n + r_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\left\{(p_{n-1} + r_{n-1}) - \frac{2}{3}\right\}$

$p_n + r_n - \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$

$p_n + r_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$

(4) と連立して

$p_n = \frac{1}{2}\left\{-\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3}\right\} = \underline{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{3}}$ //

③

(1) $z_n = i + \dfrac{\sqrt{2}(z_{n-1}-i)(1+i)}{2}$

$\Leftrightarrow \quad z_n - i = (z_{n-1}-i)(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

これは z_n が、z_{n-1} を i を中心として $\frac{\pi}{4}$ 回転させた点であることを示している

ここで $z_n = i$ とすると、$z_{n-1} = i$ となり、このとき、同様に $z_{n-2} = i$、

$z_{n-3} = i$ .... $z_0 = i$ となり、これは $z_0 \neq i$ に矛盾する。

以上より、$z_n \neq i$ であることが示された

(2) (1)より

$$\frac{z_n - i}{z_{n-1} - i} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \qquad \therefore \underline{r = 1,\ \theta = \frac{\pi}{4}}$$

(3) (2)より、

$$\frac{z_n - i}{z_0 - i} = \frac{z_n - i}{z_{n-1} - i} \times \frac{z_{n-1} - i}{z_{n-2} - i} \times \cdots \times \frac{z_1 - i}{z_0 - i}$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n = \cos\frac{n}{4}\pi + i\sin\frac{n\pi}{4}$$

$z_m = z_0$ となるとき、

$$\frac{z_m - i}{z_0 - i} = 1 = \cos\frac{m}{4}\pi + i\sin\frac{m}{4}\pi.$$

これを満たす最小の m は $\underline{8}$

(4)

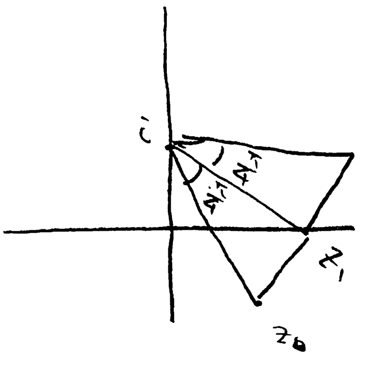
$z_0, z_1, \ldots z_7$ は i を中心とした正八角形

i, z_0, z_1 でできる三角形の面積は

i と z_0 との距離が、$|1-i-i| = \sqrt{5}$ なので

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5}^2 \times \sin\frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

したがって $S = \frac{5\sqrt{2}}{4} \times 8 = \underline{10\sqrt{2}}$

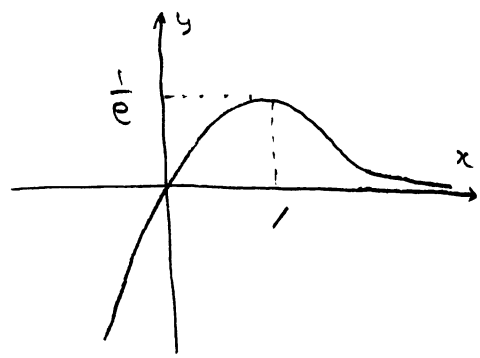


④

(1) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = 1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$



$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

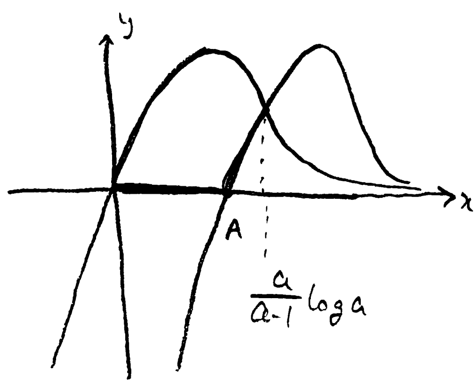
$f(x)$のグラフの概形は右のとおり。

(2) $f(x-\log a) = (x-\log a)e^{-(x-\log a)} = (x-\log a)ae^{-x}$

$xe^{-x} = (x-\log a)ae^{-x}$

$(1-a)x = -a\log a$

$x = \dfrac{a}{a-1}\log a$



(3) $(x-\log a)ae^{-x} = 0$ となるのは

$x = \log a$

$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$ （Cは積分定数）

$S = \int_0^{\frac{a}{a-1}\log a} xe^{-x}dx - \int_{\log a}^{\frac{a}{a-1}\log a} (x-\log a)ae^{-x}dx$

$= \int_0^{\frac{a}{a-1}\log a} xe^{-x}dx - \int_0^{\frac{a}{a-1}\log a - \log a} xe^{-x}dx$

$= \int_{\frac{1}{a-1}\log a}^{\frac{a}{a-1}\log a} xe^{-x}dx$

$$= \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_{\frac{1}{a-1}\log a}^{\frac{a}{a-1}\log a}$$

$$= -\frac{a}{a-1}\log a\left(a^{-\frac{a}{a-1}}\right) - \left(a^{-\frac{a}{a-1}}\right) + \frac{1}{a-1}\log a\left(a^{-\frac{1}{a-1}}\right) + \left(a^{-\frac{1}{a-1}}\right)$$

$$= a^{-\frac{a}{a-1}}\left(-\cancel{\frac{a}{a-1}\log a} - 1 + \cancel{\frac{a}{a-1}\log a} + a\right)$$

$$= (a-1)a^{-\frac{a}{a-1}}$$ //

(4)

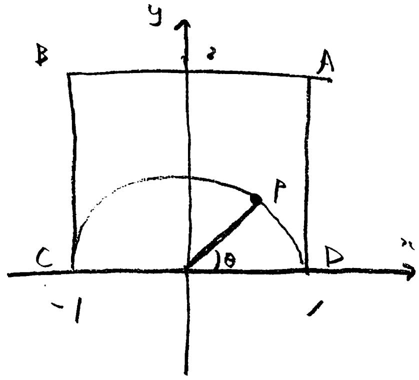
$$\frac{a-1}{a} - S = (a-1)\left(\frac{1}{a} - a^{-\frac{a}{a-1}}\right)$$

$$= (a-1)a^{-1}\left(1 - a^{\frac{-1}{a-1}}\right) \quad \cdots (*)$$

ここで $\frac{-1}{a-1} < 0$ なので $a^{\frac{-1}{a-1}} < a^{0} = 1$.

よって,(*)は正であり, $S < \frac{a-1}{a}$ が成り立っている.

⑤



A(1, 2), B(−1, 2), C(−1, 0), D(1, 0)と定める Pを(cosθ, sinθ)とすると (0<θ<π)
CP⊥PD となっているので、題意の条件を満たしている。

このとき、

$$\left(\frac{BP}{AP}\right)^2=\frac{(-1-\cos\theta)^2+(2-\sin\theta)^2}{(1-\cos\theta)^2+(2-\sin\theta)^2}=\frac{3+\cos\theta-2\sin\theta}{3-\cos\theta-2\sin\theta}$$

$$=1+\frac{2\cos\theta}{3-\cos\theta-2\sin\theta}=f(\theta)$$ とする。

$$f'(\theta)=\frac{-2\sin\theta(3-\cos\theta-2\sin\theta)-2\cos\theta(\sin\theta-2\cos\theta)}{(3-\cos\theta-2\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{2(2-3\sin\theta)}{(3-\cos\theta-2\sin\theta)^2}$$

$f'(\theta)=0$ となるのは $\sin\theta=\frac{2}{3}$ のとき。（このときの θ を α, $\pi-\alpha$ とする $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$）

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi-\alpha$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↗		↘		↗	

このとき

$$\sin\alpha=\frac{2}{3}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\lim_{\theta\to+0}f(\theta)=1+\frac{2}{3-1-0}=2$$

$$\lim_{\theta\to\pi}f(\theta)=1+\frac{-2}{3+1-0}=\frac{1}{2}$$

$$f(\alpha)=1+\frac{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}{3-\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{4}{3}}=\frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

$$f(\pi-\alpha)=1+\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}{3+\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{4}{3}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

以上より $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \leqq f(\theta) \leqq \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$$\therefore \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \leqq \frac{BP}{AP} \leqq \sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqq \frac{BP}{AP} \leqq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$\dfrac{BP}{AP}$ の最大値は $\underline{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$ //