大阪府立大学2021

1　「公約数がnとなる…」という文章は日本語としておかしい.

「公約数の1つとしてnをもつ…」という意味と考えて解く.

AとBの積を表にまとめると右のようになる

そのうち2を約数にもつものは太字の12コ

B

A	1	2	3	4
1	1	**2**	3	**4**
2	**2**	**4**	**6**	**8**
3	3	**6**	9	**12**
4	**4**	**8**	**12**	**16**

2を約数にもつ

CとDの積も同じ.

よって. ABとCDがいずれも2を約数にもつ確率 P_2 は

$$P_2 = \frac{12}{4^2} \times \frac{12}{4^2} = \frac{9}{16}$$

同様に

$$P_3 = \frac{7}{4^2} \times \frac{7}{4^2} = \frac{49}{256}$$

$$P_4 = \frac{4}{4^2} \times \frac{4}{4^2} = \frac{1}{16}$$

B

A	1	2	3	4
1	1	2	**3**	4
2	2	4	**6**	8
3	**3**	**6**	**9**	**12**
4	4	8	**12**	16

3を約数にもつ

B

A	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	**6**	8
3	3	**6**	9	**12**
4	4	8	**12**	16

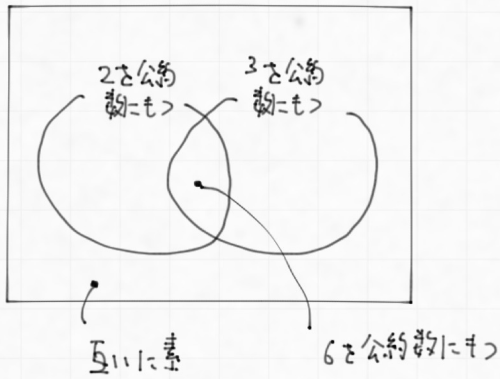
6を約数にもつ

(2) ABが持つことができる素因数は2と3のみ

右ベン図より, 互いに素となる確率Pは

$$P = 1 - (P_2 + P_3 - P_4) = 1 - \frac{144}{256} - \frac{49}{256} + \frac{16}{256}$$

$$= \frac{79}{256}$$



	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

(1) について

「最大公約数が n となる確率を P_n とする」という意味だとすると

$n=2$ のとき

AB の積が 1, 3, 9 のとき　2 を素因数に含まないので最大公約数は 2 とならない

AB の積が 2 のとき．CD が偶数なら最大公約数は 2 となる $\frac{2}{16}\times\frac{12}{16}$

AB の積が 4 のとき．CD が 2, 6 のとき最大公約数は 2 となる $\frac{3}{16}\times\frac{4}{16}$

AB の積が 6 のとき．CD が 2, 4, 8, 16 のとき最大公約数は 2 となる $\frac{2}{16}\times\frac{8}{16}$

AB の積が 8 のとき CD が 2, 6 のとき最大公約数は 2 となる $\frac{2}{16}\times\frac{4}{16}$

AB の積が 12 のとき CD が 2 のとき最大公約数は 2 となる $\frac{2}{16}\times\frac{2}{16}$

AB の積が 16 のとき CD が 2, 6 のとき最大公約数は 2 となる $\frac{1}{16}\times\frac{4}{16}$

以上をまとめて $P_2 = \frac{1}{\cancel{16^2}\ 8^2}\left(\cancel{2}\times\overset{6}{\cancel{12}} + 3\times\cancel{4} + \cancel{2}\times\overset{4}{\cancel{8}} + 2\times\cancel{4} + \cancel{2}\times\overset{1}{\cancel{2}} + \overset{1}{\cancel{1\times4}}\right)$

$= \frac{17}{8^2} = \mathbf{\frac{17}{64}}$

$n=3$ のとき．

3 を公約数にもつ確率から．6 を公約数にもつ確率と 9 を公約数にもつ確率を除けばよい．

$$P_3 = \frac{7}{16}\times\frac{7}{16} - \frac{4}{16}\times\frac{4}{16} - \frac{1}{16}\times\frac{1}{16} = \frac{1}{16^2}(49-16-1) = \frac{32}{16^2} = \mathbf{\frac{1}{8}}$$

$n=6$ のとき．

6 を公約数にもつ確率から 12 を公約数にもつ確率を除けばよい

$$P_6 = \frac{4}{16}\times\frac{4}{16} - \frac{2}{16}\times\frac{2}{16} = \frac{1}{16} - \frac{1}{64} = \mathbf{\frac{3}{64}}$$

(2) 最大公約数は 2, 3, 6 の他に．4, 8, 9, 12, 16 の可能性がある

$$P_8 = \frac{2}{16}\times\frac{3}{16} + \frac{1}{16}\times\frac{2}{16} = \frac{8}{16^2} = \frac{1}{32}$$

$$P_9 = \frac{1}{16}\times\frac{1}{16} = \frac{1}{256}$$

$$P_{12} = \frac{2}{16}\times\frac{2}{16} = \frac{1}{64}$$

$$P_{16} = \frac{1}{16}\times\frac{1}{16} = \frac{1}{256}$$

$$P_4 = \frac{8}{16}\times\frac{8}{16} - P_8 - P_{12} - P_{16} = \frac{1}{4} - \frac{1}{32} - \frac{1}{64} - \frac{1}{256} = \frac{1}{256}(64-8-4-1) = \frac{51}{256}$$

$$P_1 = 1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_6 - P_8 - P_9 - P_{12} - P_{16}$$

$$= 1 - \frac{17}{64} - \frac{1}{8} - \frac{51}{256} - \frac{3}{64} - \frac{1}{32} - \frac{1}{256} - \frac{1}{64} - \frac{1}{256}$$

$$= \frac{1}{256}(256-68-51-32-12-8-1-4-1) = \mathbf{\frac{79}{256}}$$

大阪府立大学2021

2 (1) $n=1$ とすると $2^0 \cdot x_1 = 8-5\times 1$ $\quad x_1 = \mathbf{3}$

(2)
$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} x_k = 8-5n \quad (n \geqq 1)$$
$$-)\ \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} x_k = 8-5(n-1) \quad (n \geqq 2)$$

$$2^{n-1} x_n = -5 \quad (n \geqq 2)$$
$$x_n = -\frac{5}{2^{n-1}} \quad (n \geqq 2)$$

(3) $N \geqq 2$ のとき
$$\sum_{n=1}^{N} x_n = x_1 - \sum_{n=2}^{N} \frac{5}{2^{n-1}} = 3 - \frac{5}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}}{1-\frac{1}{2}} = -2 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n = \lim_{N\to\infty}\left(-2 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\right) = \mathbf{-2}$$

(4) $N \geqq 2$ のとき
$$\sum_{n=1}^{4N} x_n \sin\frac{n\pi}{2} = x_1 - x_3 + x_5 - x_7 + \cdots + x_{4N-3} - x_{4N-1}$$
$$= 3 + \frac{5}{2^2} - \frac{5}{2^4} + \frac{5}{2^6} - \cdots - \frac{5}{2^{4N-4}} + \frac{5}{2^{4N-2}}$$
$$= 3 + \frac{5}{4} \times \frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{2N-1}}{1+\frac{1}{4}} = 3 + 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{2N} = 4 - \frac{1}{16^N} \longrightarrow 4$$
$$\sum_{n=1}^{4N-1} x_n \sin\frac{n\pi}{2} = \sum_{n=1}^{4N} x_n \sin\frac{n\pi}{2} = 4 - \frac{1}{16^N} \to 4 \quad \left(\because x_{4N} \sin\frac{4N\pi}{2} = 0\right)$$

$$\sum_{n=1}^{4N-2} x_n \sin\frac{n\pi}{2} = \sum_{n=1}^{4N-3} x_n \sin\frac{n\pi}{2} = \sum_{n=1}^{4N-1} x_n \sin\frac{n\pi}{2} + x_{4N-1} = 4 - \frac{1}{16^N} - \frac{5}{2^{4N-2}} \longrightarrow 4$$

以上より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin\frac{n\pi}{2} = \mathbf{4}$

大阪府立大学2021

3 (1) $f'(x) = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \dfrac{(\sin x - \cos x)(1+\cos x \sin x)}{\cos^2 x \sin^2 x}$

$f'(x)=0$ となるのは $\cos x = \sin x$ または $1+\cos x \sin x = 0$ のとき.

$\cos x = \sin x$ より $x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5}{4}\pi$

$1+\cos x \sin x = 0 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{2}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -2$ これを満たすxは存在しない.

$f(x)$の増減は下のようになる.

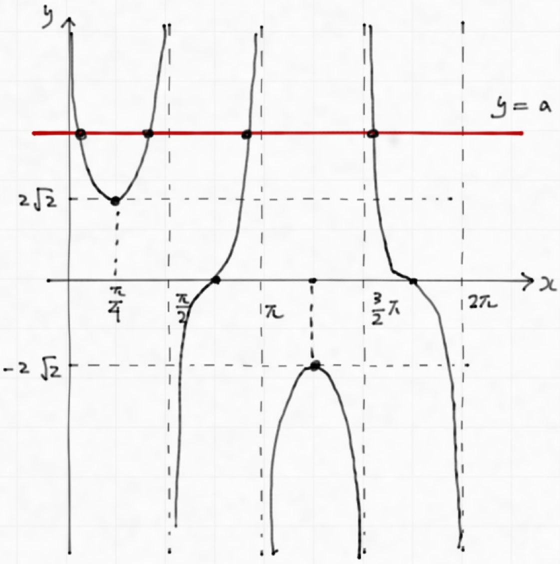
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$	/	$+$	/	$+$	0	$-$	/	$-$	/
$f(x)$		↘		↗		↗		↗		↘		↘	

よって $f(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{4}$ で極小値をとり 極小値は $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \mathbf{2\sqrt{2}}$

(2) $\lim_{x\to+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\pi-0} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to\pi+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi-0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi+0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to2\pi-0} f(x) = -\infty$

$f\left(\dfrac{5}{4}\pi\right) = \mathbf{-2\sqrt{2}}$



これらと(1)の結果より. $y=f(x)$のグラフは右のようになる.

$f(x)=a$ の解は $y=f(x)$と$y=a$のグラフの交点のx座標と等しいことから. $y=f(x)$と$y=a$ のグラフが $0<x<2\pi$ で 4つの交点を持つ条件を考える.

右グラフより. $\mathbf{a > 2\sqrt{2}}$

(2) $f''(x) = \dfrac{\sin^{\cancel{3}\,2} x + 2\cancel{\sin x}\cos^2 x}{\sin^{\cancel{4}\,3} x} + \dfrac{\cos^{\cancel{3}\,2} x + 2\sin^2 x \cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{4}\,3} x}$

$= \dfrac{\sin^2 x\cos^3 x + 2\cos^5 x + \cos^2 x\sin^3 x + 2\sin^5 x}{\sin^3 x \cos^3 x}$

$= \dfrac{\sin^2 x\cos^3 x + 2\cos^3 x(1-\sin^2 x) + \cos^2 x\sin^3 x + 2\sin^3 x(1-\cos^2 x)}{\sin^3 x \cos^3 x}$

$= \dfrac{2\cos^3 x + 2\sin^3 x - \sin^2 x\cos^3 x - \cos^2 x \sin^3 x}{\sin^3 x \cos^3 x} = \dfrac{2(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x) - \cos^2 x\sin^2 x(\cos x+\sin x)}{\sin^3 x\cos^3 x}$

$Y = \dfrac{2 - 2\sin x\cos x - \cos^2 x\sin^2 x}{\cos^3 x \sin^3 x}$.

ここに $X = 2\sin x\cos x$ より $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}X$ を代入

$Y = \dfrac{2 - X - \frac{1}{4}X^2}{\frac{1}{8}X^3} = \dfrac{-2X^2-8X+16}{X^3}$

$\mathbf{Y = -\dfrac{2X^2+8X-16}{X^3}}$

大阪府立大学2021

4 (1) $g(x)=0$ となるのは $1-\log x=0$ または $\log x=0$ のときなので. $x=e,1$

(2) $g'(x)=\dfrac{\left\{-\frac{1}{x}\log x+\frac{1}{x}(1-\log x)\right\}x-(1-\log x)\log x}{x^2}=\dfrac{(\log x)^2-3\log x+1}{x^2}$

$g'(x)=0$ を解くと $\log x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ $\quad x=e^{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$

$g(x)$ の増減は右のようになる

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	$\cdots$	$e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	$\cdots$
$g'(x)$	/	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	/	↗		↘		↗

よって $g(x)$ の極大値を与える x は $x=e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

(3) (2)より極小値を与える x は $x=e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$

(4) $g''(x)=\dfrac{\left(2\log x\cdot\cancel{\frac{1}{x}}-3\cancel{\frac{1}{x}}\right)\cancel{x^2}-2\cancel{x}\left\{(\log x)^2-3\log x+1\right\}}{x^{\cancel{4}\,3}}=\dfrac{-2(\log x)^2+8\log x-5}{x^3}$

$g''(x)=0$ となるのは $2(\log x)^2-8(\log x)+5=0$ のときで.

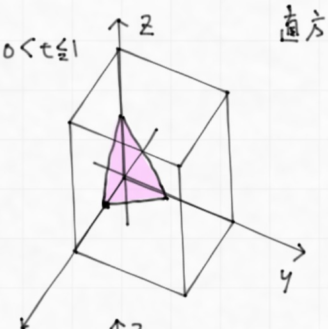
$\log x=\dfrac{4\pm\sqrt{6}}{2}$ $\quad x=e^{\frac{4\pm\sqrt{6}}{2}}$

$g''(x)$ の符号は $x=e^{\frac{4+\sqrt{6}}{2}}, e^{\frac{4-\sqrt{6}}{2}}$ のいずれの場合にも前後の符号は変化するので. これらは変曲点である.

よって変曲点を与える x は $x=e^{\frac{4+\sqrt{6}}{2}}, e^{\frac{4-\sqrt{6}}{2}}$

大阪府立大学2021

5 (1) $0<t\leqq 1$ のとき、3点 $(t,0,0)$, $(0,2t,0)$, $(0,0,3t)$ は



$0<t\leqq 1$

直方体の辺上に存在し V_1 は 左下のようになっている

このとき V_1 の体積は V_2 よりも明らかに小さいので

$$h(t)=\frac{1}{2}t\cdot 2t\cdot 3t\cdot \frac{1}{3}=\boldsymbol{t^3}$$

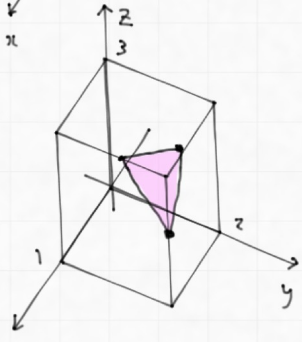
(2) $(t,0,0)$, $(0,2t,0)$, $(0,0,3t)$ を通る平面は、

$$\frac{x}{t}+\frac{y}{2t}+\frac{z}{3t}=1$$

これと $x=1$, $y=2$ との交点は　$z=3t-6$　$(1,2,3t-6)$

$x=1$, $z=3$ との交点は、　$y=2t-4$　$(1,2t-4,3)$

$y=2$, $z=3$　〃　$x=t-2$　$(t-2,0,0)$



$2\leqq t<3$

このとき V_2 の体積は

$$\frac{1}{2}\{2-(2t-4)\}\{1-(t-2)\}\times\{3-(3t-6)\}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{2}(6-2t)(3-t)(9-3t)\cdot\frac{1}{3}=(3-t)(3-t)(3-t)=(3-t)^3$$

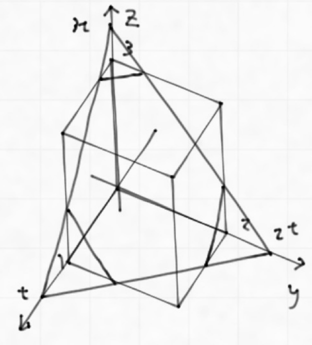
V_2 の方が V_1 よりも明らかに小さいので　$h(t)=\boldsymbol{(3-t)^3}$

(3) 直方体の中心は $\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)$.

この点を通る平面で分割されたとき、直方体は合同な2つの立体に分割される

平面の式にこの点を代入して、　$\dfrac{\frac{1}{2}}{t}+\dfrac{1}{2t}+\dfrac{\frac{3}{2}}{3t}=1$　$t=\frac{3}{2}$　　$\therefore\ \boldsymbol{T=\frac{3}{2}}$

(4)

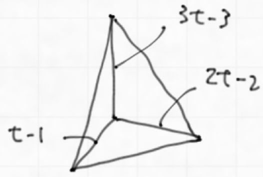


$1<t<2$

V_1 について、三角錐から3つの小さな三角錐を切りおとした形となっている。

3つの小さな三角錐について、対称性から全て合同で、

3辺の長さは右のようになっているので V_1 の体積は



$$t^3-\frac{1}{6}(t-1)(2t-2)(3t-3)\times 3$$

$$=t^3-3(t-1)^3$$

$1<t\leqq\frac{3}{2}$ のとき　$h(t)=t^3-3(t-1)^3$

$\frac{3}{2}<t<2$ のとき　$h(t)=6-t^3+3(t-1)^3$

$$\lim_{t\to T-0}\frac{h(t)-h(T)}{t-T}=\lim_{t\to\frac{3}{2}-0}\frac{t^3-3(t-1)^3-1\times2\times3\times\frac{1}{2}}{t-\frac{3}{2}}=\lim_{t\to\frac{3}{2}-0}\frac{-2t^3+9t^2-9t}{t-\frac{3}{2}}$$

$$=\lim_{t\to\frac{3}{2}-0}\frac{t\cancel{\left(t-\frac{3}{2}\right)}(-2t+6)}{\cancel{t-\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2}\times(-3+6)=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

大阪府立大学2021

5（つづき）

(5) $\displaystyle \lim_{t\to T+0}\frac{h(t)-h(T)}{t-T}=\lim_{t\to\frac{3}{2}+0}\frac{6-t^3+3(t-1)^3-3}{t-\frac{3}{2}}=\lim_{t\to\frac{3}{2}+0}\frac{2t^3-9t^2+9t}{t-\frac{3}{2}}$

$\displaystyle =\lim_{t\to\frac{3}{2}+0}\frac{t\,\cancel{(2t-3)}^{\,2}(t-3)}{\cancel{t-\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2}\times2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{2}$

(6) $\displaystyle \lim_{t\to1-0}\frac{h(t)-h(1)}{t-1}=\lim_{t\to1-0}\frac{t^3-1}{t-1}=\lim_{t\to1-0}(t^2+t+1)=3$.

$\displaystyle \lim_{t\to1+0}\frac{h(t)-h(1)}{t-1}=\lim_{t\to1+0}\frac{t^3-3(t-1)^3-1}{t-1}=\lim_{t\to1+0}\frac{-2t^3+9t^2-9t+2}{t-1}$

$\displaystyle =\lim_{t\to1+0}\frac{\cancel{(t-1)}(-2t^2+7t-2)}{\cancel{t-1}}=-2+7-2=3$.

よって $h(t)$ は $t=1$ で微分可能.

対称性から. $t=2$ のときも同等.

以上より. $h(t)$ が微分可能でないのは $t=\frac{3}{2}$ のみ