①

(1) 中心P(1, 1)と原点とのきょりは$\sqrt{2}$なので、C_1の半径は$\sqrt{2}$.

$$C_1 : (x-1)^2+(y-1)^2 = 2$$

PQがx軸と平行になるので、Qのy座標は1.

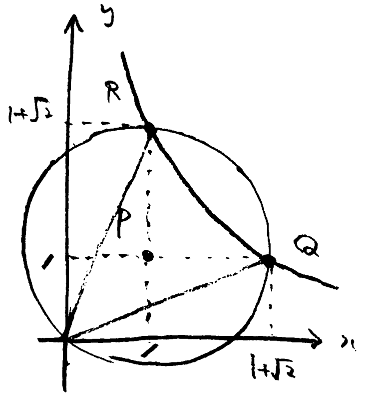
C_1上でy座標が1で、第1象限にあるのは$(1+\sqrt{2}, 1)$のみなので、

これがQである。QはC_2上の点なので、

$$1 = k \times \frac{1}{1+\sqrt{2}} \iff k = 1+\sqrt{2}.$$

このとき、Rは$(1, 1+\sqrt{2})$となる。

$$\underline{k = 1+\sqrt{2},\ q = 1+\sqrt{2},\ r = 1}$$



(2)

$$S = \frac{1}{2}\times 1\times(1+\sqrt{2}) + \int_1^{1+\sqrt{2}} y\,dx - \frac{1}{2}\times(1+\sqrt{2})\times 1$$

$$= \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1+\sqrt{2}}{x}dx = (1+\sqrt{2})\left[\log x\right]_1^{1+\sqrt{2}}$$

$$= \underline{(1+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2})}$$

(3)

$$\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{2}\cos\theta$$

x	$1 \to 1+\sqrt{2}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$

$$\int_1^{1+\sqrt{2}} \sqrt{2-(x-1)^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2-(\sqrt{2}\sin\theta)^2}\ \sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos 2\theta\,d\theta = \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 0 - (0+0) = \underline{\frac{\pi}{2}}$$

(4)

$$V = \int_1^{1+\sqrt{2}} \pi y^2\,dx - \int_1^{1+\sqrt{2}} \pi y^2\,dx$$

$$= \pi\int_1^{1+\sqrt{2}} \left(1+\sqrt{2-(x-1)^2}\right)^2 dx - \pi\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{(1+\sqrt{2})^2}{x^2}dx$$

$$= \pi \int_1^{1+\sqrt{2}} 1 + 2 - (x-1)^2 - \frac{(1+\sqrt{2})^2}{x^2} \, dx + 2\pi \int_1^{1+\sqrt{2}} \sqrt{2-(x-1)^2} \, dx$$

$$= \pi \left[2x - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{(1+\sqrt{2})^2}{x} \right]_1^{1+\sqrt{2}} + 2\pi \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \pi \left(2(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{3}(1+\sqrt{2})^3 + (1+\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{2}) \right) - \pi \left(2 - \frac{1}{3} + 1 + (1+\sqrt{2})^2 \right) + \pi^2$$

$$= -\frac{1}{3}\pi (1+\sqrt{2})^3 + 3\pi(1+\sqrt{2}) - \frac{8}{3}\pi + \pi^2$$

$$= -\frac{1}{3}\pi - \sqrt{2}\pi - 2\pi - \frac{2}{3}\sqrt{2}\pi + 3\pi + 3\sqrt{2}\pi - \frac{8}{3}\pi + \pi^2$$

$$= \underline{\pi^2 - 2\pi + \frac{4}{3}\sqrt{2}\pi} \;//$$

②

(1) 交点を α_n, β_n とする（$\beta_n \geqq \alpha_n$ とする）

$$l_n = \beta_n - \alpha_n \quad \cdots ①$$

また α_n, β_n は $x^2 - p_n x + q_n = 0$ の解なので

$$\alpha_n + \beta_n = p_n, \quad \alpha_n \beta_n = q_n \quad \cdots ②$$

頂点は

$$y = \left(x - \frac{1}{2}p_n\right)^2 - \frac{1}{4}p_n^2 + q_n$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}p_n\right)^2 - \frac{1}{4}\left((\alpha_n + \beta_n)^2 - 4\alpha_n\beta_n\right) \quad (\because ②)$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}p_n\right)^2 - \frac{1}{4}l_n^2 \quad (\because ①)$$

よって C_n の頂点の y 座標は $\underline{-\frac{1}{4}l_n^2}$ //

(2) $S_n = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} -(x^2 - p_n x + q_n)dx = \frac{1}{6}(\beta_n - \alpha_n)^3 = \frac{1}{6}l_n^3$

条件より

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\frac{1}{6}l_{n+1}^3}{\frac{1}{6}l_n^3} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$l_n = \frac{n+1}{\sqrt{(n-1)n}} l_{n-1}$$

$$= \frac{n+1}{\sqrt{(n-1)n}} \times \frac{n}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} l_{n-2}$$

$$= \frac{n+1}{\sqrt{\cancel{(n-1)}n}} \times \frac{n}{\sqrt{\cancel{(n-2)}\cancel{(n-1)}}} \times \frac{\cancel{n-1}}{\sqrt{\cancel{(n-3)}\cancel{(n-2)}}} \times \cdots \times \frac{\cancel{4}}{\sqrt{2 \times \cancel{3}}} \times \frac{\cancel{3}}{\sqrt{1 \times 2}} \times l_1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n}} \times l_1$$

$l_1^2 = (\beta_1 - \alpha_1)^2 = (\beta_1 + \alpha_1)^2 - 4\alpha_1\beta_1 = p_1^2 - 4q_1 = 4$ より $l_1 = 2$.

よって

$$l_n = \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n}} \times 2 = \sqrt{n}(n+1)$$

(3)

$$l_n^2 = (\beta_n - \alpha_n)^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 4\alpha_n\beta_n = p_n^2 - 4q_n$$

(2)より $l_n = \sqrt{n}(n+1)$.

題意より $p_n = n\sqrt{n}$ を代入

$$n(n+1)^2 = n^3 - 4q_n$$

$$q_n = -\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4}n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\log\left(\frac{n^2 + \frac{1}{2}n}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}} \times \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \log e \times \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$$

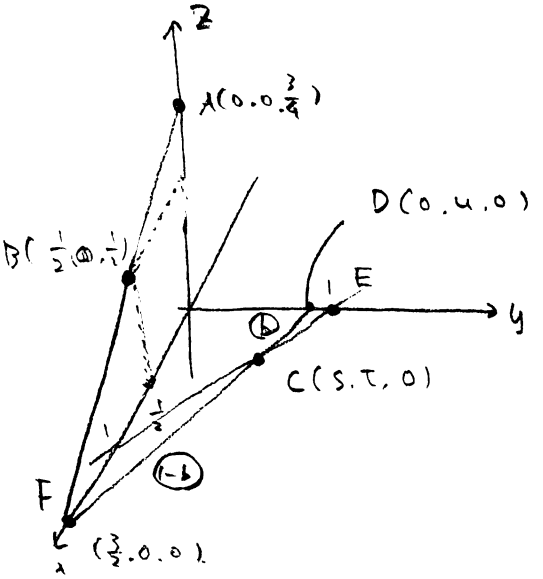
③

(1) 直線ABは
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}a\\0\\\frac{3}{4}-\frac{1}{4}a\end{pmatrix}$$

x軸は $y=z=0$ だから、 $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}a=0$ より $a=3$.

このとき $x=\frac{3}{2}$.

$\therefore\ \underline{\frac{3}{2}}$



(2) (1)の交点をFとする

C, Dは xy平面内の点だから、

Dは CF と y軸との交点となっている。

DFを $b:1-b$ に内分するとすると

$$\begin{pmatrix}s\\t\\0\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+(1-b)\begin{pmatrix}0\\u\\0\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow\quad s=\frac{3}{2}b\ ,\ t=(1-b)u.$

$b=1$とすると $t=1$ となるので矛盾するので

$$u=\frac{t}{1-b}=\frac{t}{1-\frac{2}{3}s}$$

$$=\frac{3t}{3-2(1-t)}=\frac{3t}{1+2t}$$

$\therefore\ \underline{u=\frac{3t}{1+2t}}$

また $\frac{3t}{1+2t}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2(1+2t)}$ となるが、

$s=1-t>0$ および $t>0$ より

$$0<t<1$$

$$1<1+2t<3$$

$$\frac{1}{3}<\frac{1}{1+2t}<1$$

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{2(1+2t)}<\frac{3}{2}$$

$$0<\frac{3}{2}-\frac{1}{2(1+2t)}<\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$$

となるので $0<u<1$ が成り立つ。

(3) $OD : DE = 12 : 1$ より $\vec{OD} = \frac{12}{13}\vec{OE}$

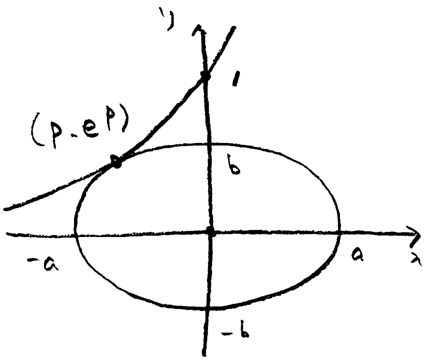
$\therefore u = \frac{12}{13}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{3t}{1+2t} = \frac{12}{13}$

$\Leftrightarrow \quad \underline{t = \frac{4}{5}}$

④

$C_1 : y = e^x$ （$= f(x)$ とおく）



(1) $f'(x) = e^x$. $f'(p) = e^p$

点 (p, e^p) はだ円 C_2 上にあるので

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{e^{2p}}{b^2} = 1 \cdots ①$$

(p, e^p) における接線は

$$\frac{px}{a^2} + \frac{e^p y}{b^2} = 1$$

その傾きは $\quad -\frac{p}{a^2} \times \frac{b^2}{e^p}$

これが、$f'(p)$ と一致するので

$$-\frac{p}{a^2} \times \frac{b^2}{e^p} = e^p \cdots ②$$

①、② を連立して b を消去すると、

$$-\frac{p}{a^2} = 1 - \frac{p^2}{a^2}$$

$$p^2 - p - a^2 = 0$$

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a^2}}{2}$$

$p < 0$ なので、$\quad p = \frac{1 - \sqrt{1+4a^2}}{2}$ //

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} (p+a) = \lim_{a\to\infty} \frac{2a+1-\sqrt{1+4a^2}}{2}$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{4a^2+4a+1-4a^2-1}{2(2a+1+\sqrt{1+4a^2})}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{4}{4+\frac{2}{a}+2\sqrt{\frac{1}{a^2}+4}} = \frac{4}{4+2\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$ //

(3) ② より

$$b^2 = -\frac{e^{2p}\cdot a^2}{p}$$

よって

$$\lim_{a\to\infty}\frac{b^2 e^{2a}}{a} = \lim_{a\to\infty}\frac{e^{2a}}{a}\times\left(-\frac{e^{2p}\cdot a^2}{p}\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{e^{2(a+p)}\cdot a}{p}\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{2\left(e^{2(a+p)}\cdot a\right)}{1-\sqrt{1+4a^2}}\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{2\, e^{2(a+p)}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+4}-\frac{1}{a}}\right)$$

$$= \frac{2\, e^{2\times\frac{1}{2}}}{\sqrt{4}} = e$$

⑤

(1) m種の文字から2種を選ぶ… ${}_mC_2$

その2種を繰り返しn回選ぶ … 2^n

上のうち、1種に片寄ったものは … 2

以上より $${}_mC_2 \times (2^n-2) = \frac{1}{2}m(m-1)(2^n-2) = \underline{m(m-1)(2^{n-1}-1)}$$

(2) a, b, c の3つから繰り返しn回選ぶ … 3^n

2つに片寄る … $3\times(3-1)(2^{n-1}-1)$ (∵ (1))

1 〃 … 3

以上より $$3^n-6(2^{n-1}-1)-3$$
$$=\underline{3^n-3\cdot2^n+3}$$

(3) n人が順にP, Q, Rのグループを選ぶとする。

全てのグループに人が属する(3つのグループに分かれる)のは
$$3^n-3\cdot2^n+3$$

実際にはグループの区別はないので、グループ分けは
$$(3^n-3\cdot2^n+3)\times\frac{1}{3!}\text{ 通り}$$

P, Qの2つのグループに分かれるのは 2^n-2.

区別がないことを考えて
$$(2^n-2)\times\frac{1}{2!}\text{ 通り}$$

1つのグループになるのは 1通り

以上より もとめる確率 P_n は

$$P_n=\frac{2^{n-1}-1}{\frac{1}{2}(3^{n-1}-2^n+1)+2^{n-1}-1+1}$$

$$=\frac{2^n-2}{3^{n-1}-2^n+1+2^n}=\frac{2^n-2}{3^{n-1}+1}$$

(4) $P_n = \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1}+1} \leqq \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}+1} < \dfrac{2^n}{3^{n-1}} \leqq \dfrac{1}{3}$ を考える

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \times 2$ は単調に減少し、$2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$, $2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{16}{27}$

$2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{32}{81}$, $2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 = \dfrac{64}{243} < \dfrac{1}{3}$

となるので、$n \geqq 6$ のとき、$\dfrac{2^n}{3^{n-1}} \leqq \dfrac{1}{3}$.

ここで P_5 は $P_5 = \dfrac{2^5-2}{3^4+1} = \dfrac{30}{82} > \dfrac{1}{3}$.

$n \geqq 6$ のとき、

$$P_n = \frac{2^n-2}{3^{n-1}+1} < \frac{2^n}{3^{n-1}} < \frac{1}{3}$$

となるので

$P_n \leqq \dfrac{1}{3}$ となるのは <u>$n \geqq 6$ のとき</u>.