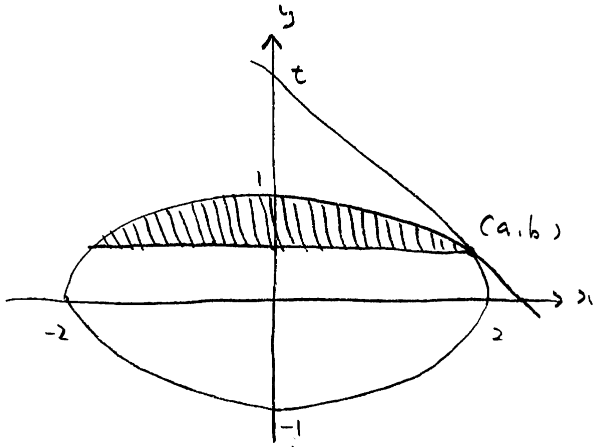
① (1) 接線は

$$\frac{ax}{4} + by = 1$$



$x = 0$ のとき $y = t$

$$t = \frac{1}{b}$$

$y = 0$ のとき

$$x = \frac{4}{a}$$

したがって $S_1(t) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{b} \times \frac{4}{a} = \frac{2}{ab}$

ここで (a, b) は C上の点なので

$$\frac{a^2}{4} + b^2 = 1 \quad \cdots ①$$

相加相乗平均の公式より

$$\frac{a^2}{4} + b^2 \geqq 2\sqrt{\frac{a^2}{4}b^2} = ab \qquad (\because a > 0,\ b > 0)$$

すなわち、 $ab \leqq 1$.

したがって $\frac{1}{ab} \geqq 1$ であり、 $S_1(t) \leqq 2$. となる.

等号は $\frac{a^2}{4} = b^2 \Leftrightarrow (a+2b)(a-2b) = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2b$

(a, b) は第1象限内にあるので $a = 2b$.

これと①を連立して $a = \sqrt{2},\ b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$S_1(t)$ は $(a, b) = (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき最小値 2 をとる

(2) $S_2(t) = 2\int_0^b x \, dy$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{t}} 2\sqrt{1-y^2}\, dy \qquad (\because x^2 = 4(1-y^2))$$

$y = \sin\theta$ とおく. このとき $\frac{1}{t} = \sin\theta$ を満たす θ を α とすると

$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta$,

y	$0 \to \frac{1}{t}$
θ	$0 \to \alpha$

$\frac{1}{t} = \sin\alpha \quad \left(t = \frac{1}{\sin\alpha}\right)$

$$S_2(t) = 4\int_0^{\alpha} \sqrt{1-\sin^2\theta}\, \cos\theta \, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\alpha} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta \quad = 2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\alpha}$$

$$= 2\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$\frac{dS_2(t)}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \times \frac{dS_2(t)}{d\alpha}$$

$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}, \quad \frac{dS_2}{d\alpha} = 2 + \cos 2\alpha$$

$$\frac{dS_2}{dt} = -\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \times (2 + \cos 2x)$$

$$= -\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \times (2 + 1 - 2\sin^2\alpha)$$

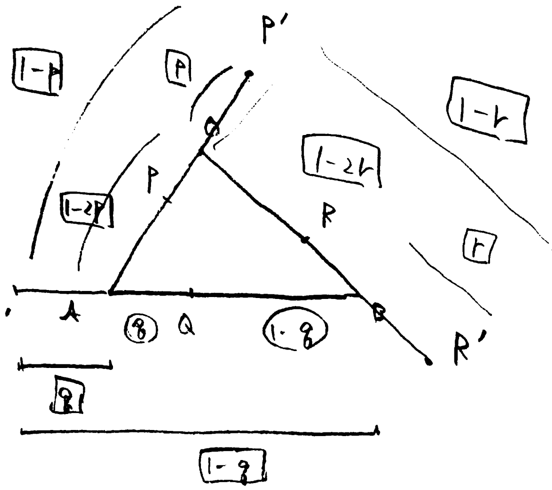
$$= -\frac{3\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + 2\cos\alpha$$

$$= -3t^2\cos\alpha + 2\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{t^2}}$$

$$\frac{dS_2}{dt} = (2-3t^2)\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}$$

② $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする



$\overrightarrow{OP}=p\vec{a}$

$\overrightarrow{OP'}=-\dfrac{p}{1-2p}\vec{a}$

$\overrightarrow{OQ}=q\vec{b}+(1-q)\vec{a}$

$\overrightarrow{OQ'}=\dfrac{-q}{-q+(1-q)}\vec{b}+\dfrac{1-q}{-q+(1-q)}\vec{a}$

$=\dfrac{-q}{1-2q}\vec{b}+\dfrac{1-q}{1-2q}\vec{a}$

$\overrightarrow{OR}=(1-r)\vec{b}$

$\overrightarrow{OR'}=\dfrac{1-r}{1-2r}\vec{b}$

(1) $\triangle PQR$ の重心をGとすると $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\left(p\vec{a}+q\vec{b}+(1-q)\vec{a}+(1-r)\vec{b}\right)$

これが$\triangle OAB$の重心 $\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$ と一致するのは

$p+1-q=1$, $q+1-r=1$

のときなので $p=q$, $q=r$ $\therefore\ p:q:r=1:1:1$

(2) $\triangle P'Q'R'$の重心が$\triangle OAB$の重心と一致するとき

$\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{p}{1-2p}\vec{a}+\dfrac{-q}{1-2q}\vec{b}+\dfrac{1-q}{1-2q}\vec{a}+\dfrac{1-r}{1-2r}\vec{b}\right)$

これより $\dfrac{-p}{1-2p}+\dfrac{1-q}{1-2q}=1$, $\dfrac{-q}{1-2q}+\dfrac{1-r}{1-2r}=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -p+\cancel{2pq}+\cancel{1}-q-2p+\cancel{2pq}=\cancel{1}-2p-2q+\cancel{4pq} \\ -q+\cancel{2qr}+\cancel{1}-r-\cancel{2q}+\cancel{2qr}=\cancel{1}-\cancel{2q}-2r+\cancel{4qr} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $p-q=0$, $q-r=0$

$\Leftrightarrow$ $p=q=r$

これは(1)と同じ条件なので

$\triangle OAB$の重心と$\triangle P'Q'R'$の重心が一致するとき

$\triangle OAB$の重心と$\triangle PQR$の重心が一致する

(3) $\overrightarrow{P'Q'} = \dfrac{-q}{1-2q}\vec{b} + \dfrac{1-q}{1-2q}\vec{a} + \dfrac{p}{1-2p}\vec{a}$

$\overrightarrow{P'R'} = \dfrac{1-r}{1-2r}\vec{b} + \dfrac{p}{1-2p}\vec{a}$

$\overrightarrow{P'Q'} \parallel \overrightarrow{P'R'}$ より　$\dfrac{1-q}{1-2q} + \dfrac{p}{1-2p} : \dfrac{-q}{1-2q} = \dfrac{p}{1-2p} : \dfrac{1-r}{1-2r}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{-pq}{(1-2q)(1-2p)} = \dfrac{(1-q)(1-r)}{(1-2r)(1-2q)} + \dfrac{p(1-r)}{(1-2r)(1-2p)}$

$\Leftrightarrow \quad -pq(1-2r) = (1-q)(1-2p)(1-r) + p(1-r)(1-2q)$

$\Leftrightarrow \quad -pq + 2pqr = (1-\cancel{2}p - q + \cancel{2pq} + \cancel{p} - \cancel{2pq})(1-r)$

$\Leftrightarrow \quad -pq + 2pqr = 1 - r - q + qr - p + pr$

$\Leftrightarrow \quad 2pqr + p + q + r = pq + qr + rp + 1$

証明終

③

(1) (A)が十分条件であることを示す.

$f_1(x) = x$ なので $m_1 f_1(x)$ は整数

$f_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$ について, x, $x-1$ は連続した2つの整数なので, いずれかは偶数であり, したがって $f_2(x)$ は整数値整式.

以上より $m_0 + m_1 f_1(x) + m_2 f_2(x)$ は x が整数ならば必ず整数であり $P(x)$ は整数値整式となっている.

(A)が必要条件であることを示す.

$P(0) = c$ となるので c は整数 これを z_1 とする(z_i は整数で以下同様)

$P(1) = a+b+c = z_2$

$P(-1) = a-b+c = z_3$

$P(1) - P(-1) = 2b = z_2 - z_3$ $\therefore b = \frac{z_2 - z_3}{2}$

$P(1) + P(-1) = 2a + 2c = z_2 + z_3$ $\therefore a = \frac{z_2 + z_3 - 2z_1}{2}$

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{1}{2}(z_2 + z_3 - 2z_1)x^2 + \frac{1}{2}(z_2 - z_3)x + z_1 \\
&= \frac{1}{2}(z_2 + z_3 - 2z_1)x(x-1) + \frac{1}{2}(z_2 + z_3 - 2z_1)x \\
&\quad + \frac{1}{2}(z_2 - z_3)x + z_1 \\
&= \frac{1}{2}(z_2 + z_3 - 2z_1)x(x-1) + \frac{1}{2}(2z_2 - 2z_1)x + z_1 \\
&= \frac{1}{2}(z_2 + z_3 - 2z_1)x(x-1) + (z_2 - z_1)x + z_1
\end{aligned}$$

ここで $z_2 + z_3 - 2z_1 = m_2$, $z_2 - z_1 = m_1$ $z_1 = m_0$

とすれば $P(x) = m_0 + m_1 f_1(x) + m_2 f_2(x)$ という形に表せる.

よって(A)は必要条件である

以上より, (A)は $P(x)$ が整数値整式であるための必要十分条件である.

④ (1) P_0について. 最初の入れ方でBに白玉を2個入れたときに赤玉がAに残るので

$$P_0 = \frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{2}$$

(i)(ii)について.

赤玉を含んだ状態で玉をとりだしたとき

白ならそのまま. 赤なら$\frac{1}{3}$の確率で赤玉白移動する

●○ → ○○ となるのは $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

●○ → ●○ 〃 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$

(i)(ii)を1回ずつ行ったとき. Aの中の玉の移り変わりは

最初の入れ方 1回目

(i) (ii)

●○ $\xrightarrow{\frac{2}{3}}$ ●○ $\xrightarrow{1}$ ●○

●○ $\xrightarrow{\frac{1}{3}}$ ○○ $\xrightarrow{\frac{1}{3}}$ ●○

○○ $\xrightarrow{1}$ ○○ $\xrightarrow{\frac{1}{3}}$ ●○

$$P_1 = P_0\times\left(\frac{2}{3}\times1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)+(1-P_0)\times1\times\frac{1}{3}$$

$$= \frac{7}{18}+\frac{1}{6} = \underline{\frac{5}{9}}$$

(1)より

(2) n回目 $n+1$回目

●○ $\xrightarrow{\frac{2}{3}\times1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}$ ●○

○○ $\xrightarrow{1\times\frac{1}{3}}$ ●○

○○ ○○

$$P_{n+1} = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\right)P_n+\frac{1}{3}(1-P_n)$$

$$= \frac{4}{9}P_n+\frac{1}{3}$$

$$P_{n+1}-\frac{3}{5} = \frac{4}{9}\left(P_n-\frac{3}{5}\right)$$

$\therefore P_n-\frac{3}{5} = \left(\frac{4}{9}\right)^n\left(P_0-\frac{3}{5}\right)$ $\therefore \underline{P_n = \frac{3}{5}-\frac{1}{10}\left(\frac{4}{9}\right)^n}$

(3) 最初の入れ方でAに赤玉が残っていて、n回目に赤玉がある確率をQ_nとすると、(2)と同様にして、

$$Q_{n+1} = \frac{4}{9}Q_n + \frac{1}{3}$$

$$Q_{n+1} - \frac{3}{5} = \frac{4}{9}\left(Q_n - \frac{3}{5}\right)$$

$$Q_n - \frac{3}{5} = \left(\frac{4}{9}\right)^n\left(Q_0 - \frac{3}{5}\right)$$

$$Q_n = \left(\frac{4}{9}\right)^n\left(1 - \frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

最初の入れ方でBの赤玉が残っていてn回目に赤玉があるのをR_nとすると

$$R_{n+1} = \frac{4}{9}R_n + \frac{1}{3}$$

$$R_n = \left(\frac{4}{9}\right)\left(0 - \frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

求める確率は

$$\frac{Q_n}{Q_n + R_n} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n}{\frac{6}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n} = \underline{\frac{3\cdot 9^n + 2\cdot 4^n}{6\cdot 9^n - 4^n}}$$