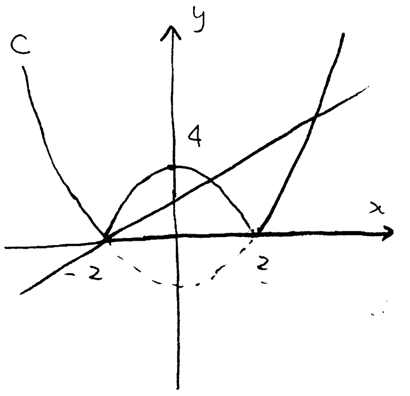
①

(1) Cの概形は右のようになる




Cの $y \geqq 2$ の部分lとlが交わる条件は lの傾きが正(または0)であることと、lが点(2,0)の上側を通ることで

$$a \geqq 0 \quad , \quad 2a+b \geqq 0 \quad \cdots (A)$$

Cの $-2<x<2$ の部分とlが交点をもつのは lが(-2,0)の上側を通って、かつ $y=-x^2+4$ の (-2,0) における傾きよりも傾きが小さいこと。

$y'=-2x$ だから $\quad a<4 \quad , \quad 2a+b>0 \quad \cdots (B)$

Cの $x<-2$ の部分とlが交点を持つのは lが $y=x^2-4$ の(-2,0)における傾きよりも小さな傾きをもつこと。

$y'=2x$ だから $\quad a<-4 \quad \cdots (C)$

lが(-2,0)を通るのは

$$0=-2a+b \quad \cdots (D)$$

が成り立てばよい。

(C)のとき、(A),(B)の条件は成立しないので、(-2,0)を含めて共有点は2ヶ所

したがって共有点が3つとなるのは (A)かつ(B)かつ(D)のときで、

$$0 \leqq a<4, \quad 2a+b>0, \quad b=2a$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leqq a<4 \quad 4a>0, \quad b=2a$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{0<a<4, \ b=2a}$$

(2) lとCの $-2<x<2$ の部分が2点で交わるとき、

lとCは必ず4つの共有点をもつことは明らか。

またCの $-2<x<2$ の部分と共有点を持たないときは、

共有点が最大2ヶ所となる

したがって．$l$と$C$が共有点を持つための条件は．

(1)のように$l$が$(-2,0)$を通るときか．$(2,0)$を通るとき．

または$l$が$-2<x<2$の範囲で$C$と接することが必要となる

$(-2,0)$を通るときは(1)より．　$0<a<4$，$b=2a$

$(2,0)$　〃　(1)との対称性より　$-4<a<0$，$b=-2a$

$-2<x<2$の範囲で$l$と$C$が接するとき．

このとき$x<-2$および．$x>2$の範囲で．$l$と$C$はそれぞれ1つずつ交わることは明らか．で．接点と併せて共有点を3つもつ．

接する条件は

$$-x^2+4=ax+b \iff x^2+ax+b-4=0$$

が$-2<x<2$で重解をもつことで．上式の判別式を$D$として．

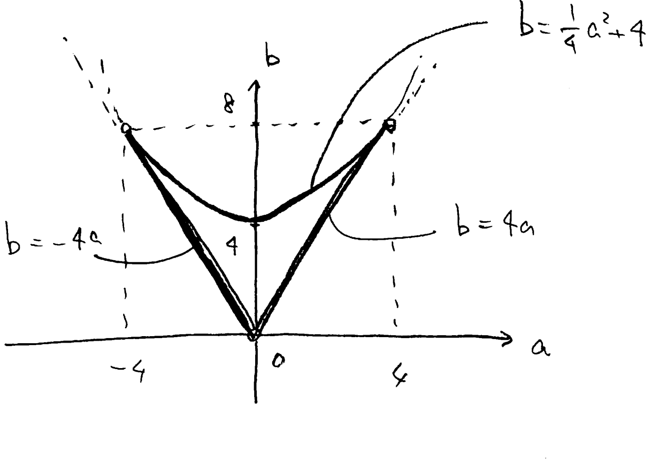
$$D=a^2-4(b-4)=0,\quad \text{かつ}\quad -2<-\frac{a}{2}<2.$$

$$b=\frac{1}{4}a^2+4\quad(-4<a<4).$$

以上より．$l$と$C$が3つの共有点をもつための条件は．

$$\begin{cases} b=2a & (0<a<4) \\ b=-2a & (-4<a<0) \\ b=\frac{1}{4}a^2+4 & (-4<a<4) \end{cases}$$

これを図示すると下のようになる



②

(1) 6枚からカードを3枚とるときの取り出し方は ${}_6C_3$ 通りで、その際の得点は

以下のようになる

| | 得点 | | 得点 |
|---|---|---|---|
| (0, 1, 2) | 3 | (1, 2, 3) | 2 |
| (0, 1, 3) | 4 | (1, 2, 4) | $\frac{7}{3}$ |
| (0, 1, 4) | 5 | (1, 2, 5) | $\frac{8}{3}$ |
| (0, 1, 5) | 6 | (1, 3, 4) | $\frac{8}{3}$ |
| (0, 2, 3) | 5 | (1, 3, 5) | 3 |
| (0, 2, 4) | 6 | (1, 4, 5) | $\frac{10}{3}$ |
| (0, 2, 5) | 7 | (2, 3, 4) | 3 |
| (0, 3, 4) | 7 | (2, 3, 5) | $\frac{10}{3}$ |
| (0, 3, 5) | 8 | (2, 4, 5) | $\frac{11}{3}$ |
| (0, 4, 5) | 9 | (3, 4, 5) | 4 |

(i) A, B, 両方とも 0を取りかつ、双方とも得点が3.

$$\frac{1}{20}\times\frac{1}{20}$$

(ii) A, Bのうち一方が 0を取り、双方とも得点が3.

$$\frac{1}{20}\times\frac{2}{20}\times 2$$

(i)(ii)より、もとめる確率は

$$\left(\frac{1}{20}\right)^2+\left(\frac{1}{20}\right)^2\times 4 = \frac{5}{400} = \underline{\frac{1}{80}}$$

(2) 得点と取り出し方は次の通り

| 得点 | 2 | $\frac{7}{3}$ | $\frac{8}{3}$ | 3 | $\frac{10}{3}$ | $\frac{11}{3}$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 取り出し方 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 累計 | 1 | 2 | 4 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 19 | 20 |

A君の得点がB君の得点を上回るのは

$$\left(\frac{1}{20}\right)^2\left(\overset{(\frac{7}{3})}{1\times1}+\overset{(\frac{8}{3})}{2\times2}+\overset{(3)}{3\times4}+\overset{(\frac{10}{3})}{2\times7}+\overset{(\frac{11}{3})}{1\times9}+\overset{(4)}{2\times10}+\overset{(5)}{2\times12}+\overset{(6)}{2\times14}+\overset{(7)}{2\times16}+\overset{(8)}{1\times18}+\underset{(9)}{1\times19}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{20}\right)^2(1+4+12+14+9+20+24+28+32+18+19)$$

$$=\left(\frac{1}{20}\right)^2\times181$$

上のうちAの得点が整数ではないものは

$$\left(\frac{1}{20}\right)^2\times(1\times1+2\times2+2\times7+1\times9)=\left(\frac{1}{20}\right)^2\times(1+4+14+9)=\left(\frac{1}{20}\right)^2\times28$$

したがって求める条件付き確率は

$$\frac{\left(\frac{1}{20}\right)^2\times28}{\left(\frac{1}{20}\right)^2\times181}=\underline{\frac{28}{181}}$$

③

(1) $ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつとき、その判別式 $D$ は平方数でなければならない。したがって、

$$D=b^2-4ac=n^2$$

を満たす負でない整数 $n$ が存在する。

(i) $b=1$ のとき、$1-4ac<0$ となるので $(a,b,c)$ の組みは存在しない。

(ii) $b=2$ のとき　$4-4ac<0$　〃　〃

(iii) $b=3$ 〃　$9-4ac=n^2$ について、$n$ は $0,1,2$ のいずれかなので

順に調べて、$n=1$, $ac=2$.

$(a,b,c)=(1,3,2),(2,3,1)$ の 2通り。

(iv) $b=4$ のとき　$16-n^2=4ac$ について、$n$ は $0\sim3$ のいずれかで、

$n=0$ かつ $ac=4$,　$n=2$ かつ $ac=3$

$a,b,c$ は異なる整数なので

$(a,b,c)=(1,4,3),(3,4,1)$ の 2通り。

(v) $b=5$ のとき、$25-n^2=4ac$，$n$ は $0\sim4$.

$n=1$ かつ $ac=6$，$n=3$ かつ $ac=4$

$(a,b,c)=(1,5,6),(6,5,1),(2,5,3),(3,5,2)$

$,(1,5,4),(4,5,1)$　の 6通り。

(vi) $b=6$ のとき　$36-n^2=4ac$　$n$ は $0\sim5$

$n=0$ かつ $ac=9$　$n=2$ かつ $ac=8$　$n=4$ かつ $ac=5$

$(a,b,c)=(1,6,5),(5,6,1),(2,6,4),(4,6,2)$ の 4通り

(vii) $b=7$ のとき　$49-n^2=4ac$　$n$ は $0\sim6$

$n=1$ かつ　$ac=12$　$(a,b,c)=(2,7,6),(6,7,2),(3,7,4),(4,7,3)$

$n=3$ かつ　$ac=10$　$(a,b,c)=(2,7,5),(5,7,2)$

$n=5$ かつ　$ac=6$　$(a,b,c)=(2,7,3),(3,7,2),(1,7,6),(6,7,1)$

10通り

(i)～(vii) より　$2+2+6+4+10=24$　24通り。

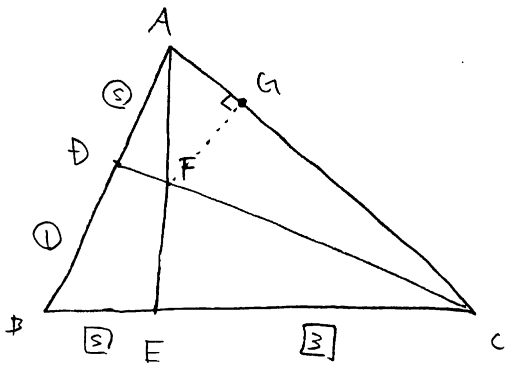
(2)

| $(a, b, c)$ | | | 整数解 |
|---|---|---|---|
| $(1, 3, 2)$ | $x^2+3x+2=0$ | $x=-1, -2$ | あり |
| $(2, 3, 1)$ | $2x^2+3x+1=0$ | $x=-\frac{1}{2}, -1$ | あり |
| $(1, 4, 3)$ | $x^2+4x+3=0$ | $x=-1, -3$ | あり |
| $(3, 4, 1)$ | $3x^2+4x+1=0$ | $x=-\frac{1}{3}, -1$ | あり |
| $(1, 5, 6)$ | $x^2+5x+6=0$ | $x=-2, -3$ | あり |
| $(6, 5, 1)$ | $6x^2+5x+1=0$ | $x=-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ | $\boxed{\text{なし}}$ |
| $(2, 5, 3)$ | $2x^2+5x+3=0$ | $x=-\frac{3}{2}, -1$ | あり |
| $(3, 5, 2)$ | $3x^2+5x+2=0$ | $x=-\frac{2}{3}, -1$ | あり |
| $(1, 5, 4)$ | $x^2+5x+4=0$ | $x=-1, -4$ | あり |
| $(4, 5, 1)$ | $4x^2+5x+1=0$ | $x=-1, -\frac{1}{4}$ | あり |
| $(1, 6, 5)$ | $x^2+6x+5=0$ | $x=-1, -5$ | あり |
| $(5, 6, 1)$ | $5x^2+6x+1=0$ | $x=-\frac{1}{5}, -1$ | あり |
| $(2, 7, 6)$ | $2x^2+7x+6=0$ | $x=-\frac{3}{2}, -2$ | あり |
| $(6, 7, 2)$ | $6x^2+7x+2=0$ | $x=-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$ | $\boxed{\text{なし}}$ |
| $(3, 7, 4)$ | $3x^2+7x+4=0$ | $x=-\frac{4}{3}, -1$ | あり |
| $(4, 7, 3)$ | $4x^2+7x+3=0$ | $x=-\frac{3}{4}, -1$ | あり |
| $(2, 7, 5)$ | $2x^2+7x+5=0$ | $x=-\frac{3}{2}, -1$ | あり |
| $(5, 7, 2)$ | $5x^2+7x+2=0$ | $x=-\frac{2}{5}, -1$ | あり |
| $(2, 7, 3)$ | $2x^2+7x+3=0$ | $x=-\frac{1}{2}, -3$ | あり |
| $(3, 7, 2)$ | $3x^2+7x+2=0$ | $x=-\frac{1}{3}, -2$ | あり |
| $(2, 6, 4)$ | $2x^2+6x+4=0$ | $x=-1, -2$ | あり |
| $(4, 6, 2)$ | $4x^2+6x+2=0$ | $x=-\frac{1}{2}, -1$ | あり |
| $(1, 7, 6)$ | $x^2+7x+6=0$ | $x=-1, -6$ | あり |
| $(6, 7, 1)$ | $6x^2+7x+1=0$ | $x=-1, -\frac{1}{6}$ | あり |

以上より 22通り

④

(1) メネラウスの定理より




$$\frac{BC}{CE}\times\frac{EF}{FA}\times\frac{AD}{DB}=1$$

$$\frac{s+3}{3}\times\frac{EF}{FA}\times\frac{s}{1}=1$$

$$EF : FA = 3 : s(s+3)$$

$$\vec{AF}=\frac{AF}{EF+FA}\vec{AE}=\frac{s(s+3)}{s^2+3s+3}\left(\frac{3}{s+3}\vec{AB}+\frac{s}{s+3}\vec{AC}\right)$$

$$=\underline{\frac{3s}{s^2+3s+3}\vec{AB}+\frac{s^2}{s^2+3s+3}\vec{AC}}$$

(2) FGが最大となるとき、△AFCの面積も最大となるので△AFCの面積について考える。

$$\triangle AFC=\frac{AF}{AE}\times\triangle AEC=\frac{AF}{AE}\times\frac{EC}{BC}\triangle ABC$$

$$=\frac{s(s+3)}{s^2+3s+3}\times\frac{3}{s+3}\times\triangle ABC$$

$$=\frac{3s}{s^2+3s+3}\triangle ABC$$

$$=\frac{3}{s+\frac{3}{s}+3}\triangle ABC$$

ここで 相加相乗平均の公式より

$$s+\frac{3}{s}\geqq 2\sqrt{s\times\frac{3}{s}}=2\sqrt{3}\quad\left(\text{等号は } s=\frac{3}{s} \text{ より } s=\sqrt{3}\right)$$

となるので △AFCは $s=\sqrt{3}$ のとき最大となる

このとき、FGの長さも最大となるので $\underline{s=\sqrt{3}}$

⑤

(1) (*)より

$$\overline{z\bar{z}+\alpha z+\beta\bar{z}+\gamma}=\bar{0}$$

$$\Leftrightarrow\quad z\bar{z}+\bar{\alpha}\bar{z}+\bar{\beta}z+\bar{\gamma}=0 \quad \cdots (**)$$

(*)−(**)

$$z\bar{z}+\alpha z+\beta\bar{z}+\gamma-z\bar{z}-\bar{\alpha}\bar{z}-\bar{\beta}z-\bar{\gamma}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (\alpha-\bar{\beta})z-(\bar{\alpha}-\beta)\bar{z}+\gamma-\bar{\gamma}=0$$

証明終

(2) $\gamma$は負の実数なので $\gamma-\bar{\gamma}=0$.

よって(1)より

$$(\alpha-\bar{\beta})z-(\bar{\alpha}-\beta)\bar{z}=0$$

が必要で、これより

$$(\alpha-\bar{\beta})z=(\bar{\alpha}-\beta)\bar{z}$$
$$=\overline{(\alpha-\bar{\beta})z}$$

だから、$(\alpha-\bar{\beta})z$も実数となる.

(i) $\alpha-\bar{\beta}=0$のとき、(*)は.

$$z\bar{z}-\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\gamma=0$$

$$(z-\beta)(\bar{z}-\bar{\beta})=|\beta|^2-\gamma$$

$$|z-\beta|=\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$$

となるが、これは、$\beta$を中心とした半径$\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$の円周上の点を表しており、

これは、$z$が、ちょうど2個という条件を満たさない。

(ii) $\alpha-\bar{\beta}\neq 0$のとき

$$(\alpha-\bar{\beta})z=k \qquad (k\text{は実数})$$

$$z=\frac{k}{\alpha-\bar{\beta}}$$

⑥

(1) $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$ とおく.

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}I$$

$$I = \frac{a}{a^2+b^2}\left(e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}e^{ax}\sin bx\right)$$

よって $I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx = \left[\frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\left(\cos bx + \frac{b}{a}\sin bx\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \underline{\frac{a}{a^2+b^2}e^{\frac{a}{2}\pi}\left(\cos\frac{b}{2}\pi + \frac{b}{a}\sin\frac{b}{2}\pi\right) - \frac{a}{a^2+b^2}}_{\,//}$$

(2) $\sin bx \sin cx = -\frac{1}{2}\left\{\cos(b+c)x - \cos(b-c)x\right\}$ だから.

$$J(a,b,c) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos(b-c)x - e^{ax}\cos(b+c)x\,dx$$

$$= \underline{\frac{1}{2}I(a,b-c) - \frac{1}{2}I(a,b+c)}_{\,//}$$

(3). $\sin tx \times \cos 4tx = \frac{1}{2}(\sin 5tx - \sin 3tx)$

$\sin 2tx \times \cos 3tx = \frac{1}{2}(\sin 5tx - \sin tx)$

$\sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx = \frac{1}{4}\Big(\sin^2 5tx - \sin tx \sin 5tx - \sin 3tx \sin 5tx$
$+ \sin tx \sin 3tx$

$$8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 5tx\, dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 5tx\, dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 3tx \sin 5tx\, dx$$

$$+ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 3tx\, dx$$

$$= 2J(1, 5t, 5t) - 2J(1, 5t, t) - 2J(1, 5t, 3t) + 2J(1, 3t, t)$$

$$= I(1, 0) - I(1, 10t) - I(1, 4t) + I(1, 6t) - \cancel{I(1, 2t)} + I(1, 8t)$$

$$+ \cancel{I(1, 2t)} - I(1, 4t)$$

$$= I(1, 0) + I(1, 6t) + I(1, 8t) - 2I(1, 4t) - I(1, 10t)$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + \frac{1}{1+6^2t^2} e^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3t\pi + 6t \sin 3\pi t) - \frac{1}{1+6^2t^2}$$

$$+ \frac{1}{1+(8t)^2} e^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4t\pi + 8t \sin 4\pi t) - \frac{1}{1+64t^2}$$

$$- 2\left\{ \frac{1}{1+16t^2} e^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\pi t + 4t \sin 2\pi t) - \frac{1}{1+16t^2} \right\}$$

$$- \left\{ \frac{1}{1+100t^2} e^{\frac{\pi}{2}} (\cos 10\pi t + 10t \sin 10\pi t) - \frac{1}{1+100t^2} \right\}$$

ここで

$$\left| \frac{1}{1+36t^2} e^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3t\pi + 6t \sin 3\pi t) - \frac{1}{1+6^2t^2} \right|$$

$$\leqq \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{1+36t^2}(1+6t) + \frac{1}{1+6^2t^2} \longrightarrow 0$$

となり、他の項も同様に考えれば上式の極限値は $e^{\frac{\pi}{2}}-1$ となることが分かる。

$$\therefore\ \underline{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}$$