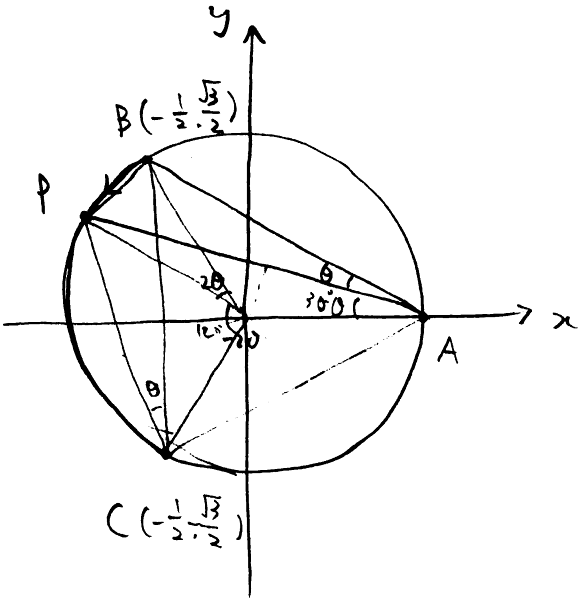
①




$$PA = 2\cos(30° - \theta)$$
$$= \underline{2\sin(60° + \theta)}$$

$$PB = \underline{2\sin\theta}$$

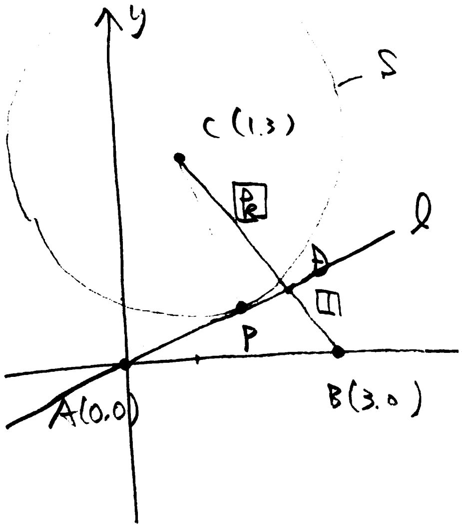
$$PC = \underline{2\sin(60° - \theta)}$$

$$PA + PB + PC = 2\sin(60° + \theta) + 2\sin\theta + 2\sin(60° - \theta)$$
$$= 2\sin 60°\cos\theta + \cancel{2\cos 60°\sin\theta} + 2\sin\theta + 2\sin 60°\cos\theta - \cancel{2\cos 60°\sin\theta}$$
$$= 2\sqrt{3}\cos\theta + 2\sin\theta$$
$$= \underline{4\sin(\theta + 60°)}$$

$\underline{\theta = 30°のとき\ 最大\ 4}$

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 4\sin^2(60° + \theta) + 4\sin^2\theta + 4\sin^2(60° - \theta)$$
$$= 2(1 - \cos(120° + 2\theta)) + 2(1 - \cos 2\theta) + 2(1 - \cos(120° + 2\theta))$$
$$= 6 - 2\cos 120°\cos 2\theta + \cancel{2\sin 120°\sin 2\theta} - 2\cos 2\theta - 2\cos 120°\cos 2\theta - \cancel{\sin 120°\sin 2\theta}$$
$$= 6 + \cancel{2\cos 2\theta} - \cancel{2\cos 2\theta} = \underline{6}$$

②




(1) DはBCを1:kに内分

$$\overrightarrow{OD} = \frac{k\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{1+k} = \frac{k}{1+k}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{1+k}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{1+k}\begin{pmatrix}3k+1\\3\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ D\left(\frac{3k+1}{1+k},\ \frac{3}{1+k}\right)$$

lはDを通るのでその傾きは $\frac{3}{1+k} \div \frac{3k+1}{1+k} = \frac{3}{3k+1}$

$$\therefore\ l:\ y = \frac{3}{3k+1}x$$

Cとlとのきょりは

$$\frac{\left|\frac{3}{3k+1} - 3\right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{3k+1}\right)^2+1}} = \frac{|\cancel{3}-9k-\cancel{3}|}{\sqrt{9+9k^2+6k+1}} = \frac{9k}{\sqrt{9k^2+6k+10}}$$

(2) 円Sは $(x-1)^2+(y-3)^2 = \frac{81k^2}{9k^2+6k+10}$

半径をrとすると

$$81k^2 = (9k^2+6k+10)r^2$$

$$9r^2k^2-81k^2+6r^2k+10r^2 = 0$$

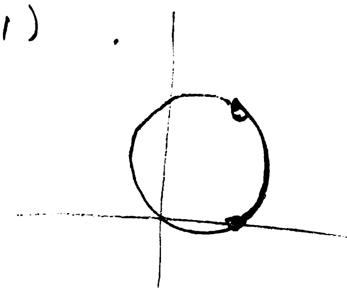
$$D/4 = 9r^4-(9r^2-81)\times 10r^2 = -9r^4+810r^2 \geq 0$$

$$r^2(r^2-90)\leqq 0.$$

$\therefore\ 0 \leqq r^2 \leqq 90$ $\qquad\qquad \therefore\ \underline{0 < r \leqq 3\sqrt{10}.}$ //

(3) ACを直径とする円で ACより下側にある半円弧部分

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.\ (x>1)$$



(4) $l \perp BC.$

DCの傾きは $-\frac{3}{2}$ なので

$$\frac{3}{3k+1}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$$

$\Leftrightarrow\ 6k+2=9 \quad \Leftrightarrow\ \underline{k=\frac{7}{6}.}$

このとき、P=D となるので

$$P\left(\frac{27}{13},\ \frac{18}{13}\right)$$

③

(1) 3つの条件より　$0<x_1<1$、$\frac{1}{x_1}$ と $\frac{x_1}{2}$ の小数部分は等しい

$\frac{1}{x_1}$ の整数部分は1

$$1 \leqq \frac{1}{x_1} < 2 \iff \frac{1}{2} < x_1 \leqq 1$$

よって　$\frac{x_1}{2}$ は　$\frac{1}{4} < \frac{x_1}{2} \leqq \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad \frac{1}{x_1} - 1 = \frac{x_1}{2}$$

$$\iff 2 - 2x_1 = x_1^2$$

$$\iff x_1^2 + 2x_1 - 2 = 0$$

$$\iff x_1 = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$0<x_1<1$ より　$\underline{x_1 = -1+\sqrt{3}}$

$\frac{1}{x_n} - n = \frac{x_n}{2}$ より

$x_n = -n + \sqrt{n^2+2}$

(2) ③の条件より　$n \leqq \frac{1}{x_n} < n+1$

$$\frac{1}{n+1} < x_n \leqq \frac{1}{n}$$

ここで $x_n = \frac{1}{n}$ のとき、②の条件で、$\frac{1}{x_n} = n$ となるが、$\frac{x_n}{2}$ は 0～1 の間の数であり、これらが等しくなることはない。

$$\therefore \quad \underline{\frac{1}{x_n} < \frac{1}{n}}$$

(3) (2)より

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leqq 1 + \log_e n$$

(4)

(i) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 \times \frac{1}{n} + {}_nC_2 \times \frac{1}{n^2} + \cdots$

$$= 1 + 1 + \frac{{}_nC_2}{n^2} + \cdots$$

$$\geqq 2.$$

等号は $n=1$ のとき.

この式の両辺の底を2とする対数をとる.

$$n \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqq \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqq \frac{1}{n}$$

よって.題意は成り立つことは示された.

(ii)

(A) $n=1$ のとき

左辺 $= \frac{1}{1}$

右辺 $= 1+\log_2 1 = 1$.

∴ 左辺=右辺となり(*)は $n=1$ で成立する.

(B) $n=k$ のとき

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k} \leqq 1+\log_2 k$ が成り立つと仮定する.

このとき.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} = 1+\log_2 k+\frac{1}{k+1}$$

$$\leqq 1+\log_2 k+\log_2\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1+\log_2 k+\log_2\frac{k+2}{k+1} = \log_2\frac{k(k+2)}{k+1}+1$$

$< \log_2\frac{k^2+2k+1}{k+1}+1 = \log_2(k+1)+1$ となり $n=k+1$ でも

(A)(B)より 数学的帰納法により題意は示された.