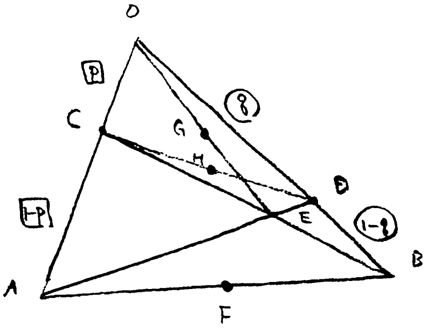
①



(1) メネラウスの定理より

$$\frac{OA}{AC}\times\frac{CE}{EB}\times\frac{BD}{DO}=1$$

$$\frac{1}{1-p}\times\frac{CE}{EB}\times\frac{1-q}{q}=1$$

$$CE:EB=q(1-p):1-q$$

$$\overrightarrow{OE}=\frac{CE}{CE+EB}\overrightarrow{OB}+\frac{EB}{CE+EB}\overrightarrow{OC}=\frac{q-pq}{q-qp+1-q}\vec{b}+\frac{1-q}{1-qp}\times p\vec{a}=\underline{\frac{q(1-p)}{1-pq}\vec{b}+\frac{p(1-q)}{1-pq}\vec{a}}$$

(2) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}=\frac{p(1-q)}{2(1-pq)}\vec{a}+\frac{q(1-p)}{2(1-pq)}\vec{b}$

$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}(p\vec{a}+q\vec{b})$

$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

$$\begin{cases}\overrightarrow{FG}=\dfrac{p-1}{2(1-pq)}\vec{a}+\dfrac{q-1}{2(1-pq)}\vec{b}\\[2ex]\overrightarrow{FH}=\dfrac{p-1}{2}\vec{a}+\dfrac{q-1}{2}\vec{b}\end{cases}$$

上の2式より $\overrightarrow{FG}=\frac{1}{1-pq}\left(\frac{p-1}{2}\vec{a}+\frac{q-1}{2}\vec{b}\right)=\frac{1}{1-pq}\overrightarrow{FH}$

よって F, G, H は一直線上にある。

(3) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{2}{3}\pi=-3$

$GF:FH=\left|\frac{1}{1-pq}\overrightarrow{FH}\right|:|\overrightarrow{FH}|=1:1-pq=7:5$

$\Leftrightarrow\ 7-7pq=5\ \cdots ①$

AB⊥GF より $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GF}=0$ となるので

$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\left((p-1)\vec{a}+(q-1)\vec{b}\right)=0$

$-3(p-1)+9(q-1)-4(p-1)+3(q-1)=0$

$-7p+12q-5=0\ \cdots ②$

② より $7p=12q-5$ を ① に代入

$12q^2-5q-2=0$ $\therefore q=\frac{2}{3},\ -\frac{1}{4}$

このうち $0<q<1$ を満たすのは $q=\frac{2}{3}$

またこのとき p は $p=\frac{1}{7}\times\left(12\times\frac{2}{3}-5\right)=\frac{3}{7}$

$\therefore\ \underline{(p,q)=\left(\frac{3}{7},\frac{2}{3}\right)}$

②

(1) $(1,2)$を通るので

$$\begin{cases} 1 = a\cos\theta - \cos 2\theta & \cdots ① \\ 2 = a\sin\theta + \sin 2\theta & \cdots ② \end{cases}$$

を同時に満たす a, θ が存在する

ここで、$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ だから $\cos\theta \neq 0$ なので ①より

$$a = \frac{1+\cos 2\theta}{\cos\theta} = \frac{1+2\cos^2\theta - 1}{\cos\theta} = 2\cos\theta$$

これを②に代入

$$2 = 2\cos\theta\sin\theta + \sin 2\theta$$

$\Leftrightarrow \quad 2 = 2\sin 2\theta$

$\Leftrightarrow \quad \sin 2\theta = 1$

$\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

このとき a は $a = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ 　　　$\therefore\ a = \sqrt{2}$

(2) $x = \sqrt{2}\cos\theta - \cos 2\theta,\ y = \sqrt{2}\sin\theta + \sin 2\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3})$

それぞれを θ で微分する

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sqrt{2}\sin\theta + 2\sin 2\theta,\quad \frac{dy}{d\theta} = \sqrt{2}\cos\theta + 2\cos 2\theta$$

よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos\theta + \sqrt{2}\cos 2\theta}{-\sin\theta + \sqrt{2}\sin 2\theta}$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + 0}{-\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}} = 1$$

$P(1,2)$ を通り傾き1の直線が l だから

$$y = 1 \times (x-1) + 2$$

$$y = x + 1$$

(3) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ において

$\frac{dx}{d\theta}=0$ となるのは $-\sqrt{2}\sin\theta+4\sin\theta\cos\theta=0$ より $\sin\theta=0$ または $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$

のときであるが、$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}>\frac{\sqrt{2}}{4}$ だから $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ において、$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$ となる

θ は存在しない。よって

$\sin\theta(4\cos\theta-\sqrt{2})\geqq 0$ であり、x は単調に増加する

$\theta=0$ のとき $x=\sqrt{2}-1$

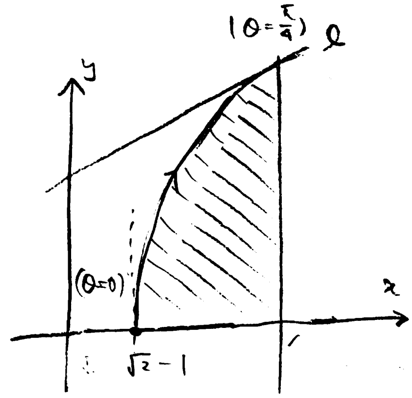
$\theta=\frac{\pi}{3}$ 〃 $x=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})>1$

つぎに y について調べる

$y=0$ となるのは $\sqrt{2}\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta=0$ より

$\sin\theta(1+\sqrt{2}\cos\theta)=0$ $\therefore$ $\theta=0$ のときのみで

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ において $y\geqq 0$ を満たしている。



よって、もとめる図形の面積を S として

$$S=\int_{\sqrt{2}-1}^{1} y\,dx=\int_{\sqrt{2}-1}^{1}\sqrt{2}\sin\theta+\sin 2\theta\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}\sin\theta+\sin 2\theta)(-\sqrt{2}\sin\theta+2\sin 2\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}-2\sin^2\theta+\sqrt{2}\sin\theta\sin 2\theta+2\sin^2 2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}-1+\cos 2\theta+2\sqrt{2}\sin^2\theta\cos\theta+1-\cos 4\theta\,d\theta$$

$$=\left[\quad+\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin^3\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\quad+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-0\right)-\left(+0+0-0\right)=\frac{5}{6}$$

③ (1) 題意より $a_n \leqq \sqrt{2n-1} < a_n + 1$

$a_n = m$ となるとき

$$m \leqq \sqrt{2n-1} < m+1$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 \leqq 2n-1 < (m+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m^2+1}{2} \leqq n < \frac{(m+1)^2+1}{2} \quad \cdots ①$$

m が奇数のとき $(m+1)^2$ は偶数なので $(m+1)^2+1$ は奇数、m^2+1 は偶数

したがって ① は $\frac{m^2+1}{2} \leqq n \leqq \frac{(m+1)^2+1-1}{2}$

これを満たす n の個数は $\frac{(m+1)^2}{2} - \frac{m^2+1}{2} + 1 = m+1$

m が偶数のときも同様に考えて ① は

$$\frac{m^2+1+1}{2} \leqq n \leqq \frac{(m+1)^2+1}{2} - 1$$

n の個数は $\frac{(m+1)^2+1}{2} - 1 - \frac{m^2+2}{2} + 1 = m$

以上より

$$\begin{cases} m \text{ が奇数のときは } m+1 \text{ 個} \\ m \text{ が偶数のときは } m \text{ 個} \end{cases}$$

(2) (1) より

$\{a_n\} = \{1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6 \ldots\}$

a_{100} は $\sqrt{199}$ を超えない最大の整数なので 14

$a_n = 13$ を満たす最大の n は $n = 98$

以上より、もとめる和を S として

$$S = \sum_{k=1}^{6}(2k)\times 2k + \sum_{k=1}^{7}(2k-1)\times 2k + 14\times(100-98)$$

$$= \frac{4}{\cancel{6}}\times\cancel{6}\times7\times13 + \cancel{4}^{2}\times\frac{1}{\cancel{6}}\times7\times8\times\cancel{15}^{5} - \cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times7\times8 + 14\times2$$

$$= 364 + 560 - 56 + 28 = 896$$

(3) $T_{12} = \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{1}\times 2 + \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{3}\times 4 + \frac{1}{4}\times 4 = \frac{16}{3}$

$a_n = 2k$ となる n は $2k$ 個あるので、それらの逆数の和は

$$\frac{1}{2k}\times 2k = 1$$

$a_n = 2k-1$ となる n は $2k$ 個あり、それらの逆数の和は

$$\frac{1}{2k-1}\times 2k = 1 + \frac{1}{2k-1}$$

$a_k = 9$ となるものの最大の k は 50 で、このとき

$$\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{a_k} = \left(1+\frac{1}{1}\right)+1+\left(1+\frac{1}{3}\right)+1+\left(1+\frac{1}{5}\right)+1+\left(1+\frac{1}{7}\right)+1+\left(1+\frac{1}{9}\right)$$

$$= 10 + \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9} = 10 + \frac{238}{315} > 10$$

$a_k = 8$ となる最大の k は 40

$$\sum_{k=1}^{40} \frac{1}{a_k} = 9 + \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7} = 9 + \frac{71}{105}$$

$$10 - \left(9 + \frac{71}{105}\right) = \frac{34}{105}$$

$a_{41}, a_{42} \cdots a_{50} = 9$ であり、

$\frac{34}{105} < \frac{1}{9}\times l$ を満たす最小の l は、3

よって $\sum_{k=1}^{43} \frac{1}{a_k} = 9 + \frac{71}{105} + \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} > 10.$

$\therefore$ $T_n > 43$ を満たす最大の n は $\underline{n = 43}$

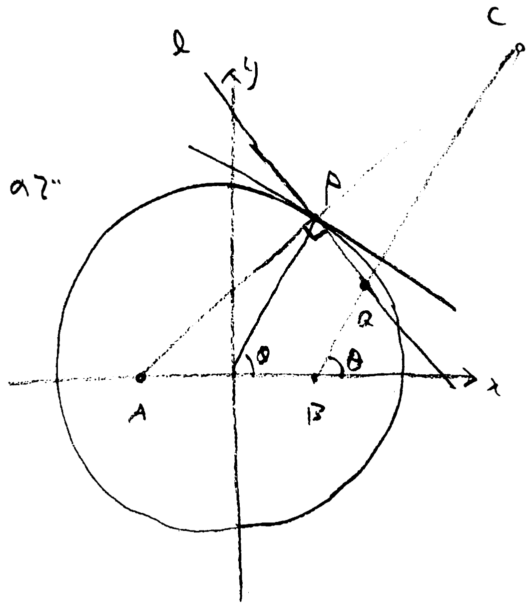
④

(1) ℓ は $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ を通り、

$\overrightarrow{AP}=(2\cos\theta+1, 2\sin\theta)$ を法線ベクトルにもつので

$$(2\cos\theta+1)(x-2\cos\theta)+2\sin\theta(y-2\sin\theta)=0$$

$$\underline{(2\cos\theta+1)x+(2\sin\theta)y-4-2\cos\theta=0}$$



(2) $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AP}$

$=(4\cos\theta+1, 4\sin\theta)$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(4\cos\theta, 4\sin\theta)$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+k(\cos\theta, \sin\theta)$ を ℓ の式に代入

$$(2\cos\theta+1)(1+k\cos\theta)+(2\sin\theta)(k\sin\theta)-4-2\cos\theta=0$$

$$2k+\cancel{2\cos\theta}+1+k\cos\theta-4-\cancel{2\cos\theta}=0$$

$$k=\frac{3}{2+\cos\theta}$$

$$|\overrightarrow{BQ}|=|k(\cos\theta, \sin\theta)|=\left|\frac{3}{2+\cos\theta}\right|=\underline{\frac{3}{2+\cos\theta}}$$

(3)

CはAの ℓ に関する対称点だから $CQ=AQ$

$\therefore\ AQ+BQ=CQ+QB=|\overrightarrow{BC}|=4$

これは、Qが、A,Bを焦点とする楕円を描くことを表している。

$AQ+BQ=4$ より、その長軸半径は2で、短軸半径をbとすると

$2^2-b^2=1$ より $b=\sqrt{3}$.

よって楕円の式は

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

長軸と短軸の比は $\underline{2:\sqrt{3}}$.