①　$f(x) = \log x + ax^2 - 3x.\ (x > 0)$

(1) $f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax - 3$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 2a$

題意より、$f(x)$ は $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で変曲点をもつので、$f''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$ が成り立つ

$f''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2 + 2a = 0.\quad \therefore\ a = 1$

(2) $a = 1$ のとき　$f(x) = \log x + x^2 - 3x$

$$f'(x) = \frac{1 + 2x^2 - 3x}{x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$$

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2} = \frac{(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)}{x^2}$$

となるので、$f'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{1}{2}, 1$、$f''(x) = 0$ となるのは $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

したがって、$y = f(x)$ のグラフの増減および極限値は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$		−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$		↗		↘		↘		↗

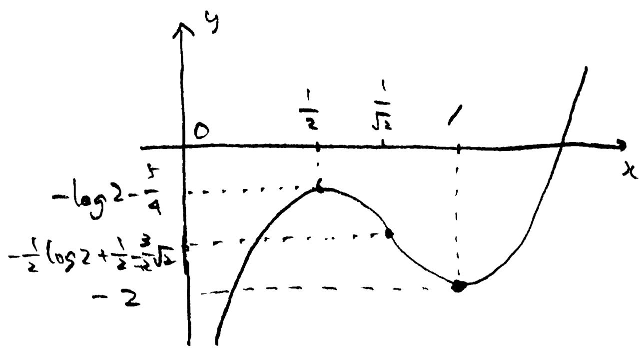
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2}$

$f(\frac{1}{2}) = -\log 2 - \frac{5}{4}$

$f(1) = -2.$



$f(x)=k$ の実数解の個数は

$y=f(x)$ と $y=k$ の 2つのグラフの交点の数と一致するので

グラフより

$$\begin{cases} k>-\log 2-\frac{5}{4},\ k<-2 \text{ のとき} & 1\text{個} \\ k=-\log 2-\frac{5}{4},\ -2 \text{ のとき} & 2\text{個} \\ -2<k<-\log 2-\frac{5}{4} \text{ のとき} & 3\text{個} \end{cases}$$

(3) 体積を V とする.

$$V=\int_1^2 \pi y^2 dx = \pi\int_1^2 (\log x+x^2-3x)^2 dx$$

$$=\pi\int_1^2 (\log x)^2+x^4+9x^2+2x^2\log x-6x\log x-6x^3\,dx$$

ここで $\int(\log x)^2 dx = x(\log x)^2-\int x\cdot 2(\log x)\times\frac{1}{x}dx$

$$=x(\log x)^2-2x\log x+2x+C_1$$

$$\int x^2\log x\,dx=\frac{1}{3}x^3\log x+\int\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^3\log x+\frac{1}{9}x^3+C_2$$

$$\int x\log x\,dx=\frac{1}{2}x^2\log x+\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\log x+\frac{1}{4}x^2+C_3$$

($C_1\sim C_3$ は積分定数)

となるので

$$V=\pi\left[x(\log x)^2-2x\log x+2x+\frac{1}{5}x^5-\frac{6}{4}x^4+3x^3+\frac{2}{3}x^3\log x+\frac{2}{9}x^3-3x^2\log x-\frac{3}{2}x^2\right]_1^2$$

$$=\pi\left(2(\log 2)^2-4\log 2+4+\frac{32}{5}-24+24+\frac{16}{3}\log 2+\frac{16}{9}-12\log 2-6\right)$$

$$-\pi\left(0+0+2+\frac{1}{5}-\frac{6}{4}+3+0+\frac{2}{9}-0-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\pi\left(2(\log 2)^2-\frac{32}{3}\log 2+\frac{434}{45}\right)$$

② $y=x^2$, $a<b$

(1) $y'=2x$. A, Bにおける接線は

$$\begin{cases} y=2a(x-a)+a^2 \\ y=2b(x-b)+b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2ax-a^2 \\ y=2bx-b^2 \end{cases}$$

その交点は、2式を連立して $\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$

$a+b=0$ のとき $(0, ab)$

$\overrightarrow{CA}=(a, a^2-ab)$, $\overrightarrow{CB}=(b, b^2-ab)$ だから

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos 60^\circ$ に代入して

$$ab+(a^2-ab)(b^2-ab)=\sqrt{a^2+(a^2-ab)^2}\sqrt{b^2+(b^2-ab)^2}\times\frac{1}{2}$$

$b=-a$を代入

$$-a^2+2a^2\times 2a^2=\frac{1}{2}(a^2+4a^4)$$

$$2a^4-\frac{3}{2}a^2=0$$

$a<b$ かつ $a+b=0$ より $a<0$ であるので $\underline{a=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) $\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ ab \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a-b}{2} \\ a(a-b) \end{pmatrix}=\frac{a-b}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix} b \\ b^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ ab \end{pmatrix}=\frac{a-b}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -2b \end{pmatrix}$

よって $k=\frac{b-a}{2}$ とすると $\overrightarrow{CA}=-k(1, 2a)$, $\overrightarrow{CB}=k(1, 2b)$ と表すことができる

証明終

(3) $\angle ACB=60^\circ$ より

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos 60^\circ$$

$$-k^2(1+4ab)=k^2\sqrt{1+4a^2}\sqrt{1+4b^2}\times\frac{1}{2}$$

$a<b$ より $k \neq 0$ なので両辺を $\frac{k^2}{2}$ で割ると

$$-2(1+4ab) = \sqrt{1+4a^2}\sqrt{1+4b^2} \quad \cdots ①$$

ここで右辺は正なので、$1+4ab<0$

よって　$ab < -\frac{1}{4}$ であるが、　$a<b$ なので $a<0$、$b>0$ で

あることが分かる

ここで　$a \geqq -\frac{\sqrt{3}}{6}$ とすると　Aにおける接線の傾きは

$$2a \geqq -\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(-30^\circ)$$

となるので、傾きの偏角が -30° をこえてしまい、$\angle ACB = 60^\circ$ と

なるような B が存在しなくなる。

よって、　$a < -\frac{\sqrt{3}}{6}$ であり、同様に　$b > \frac{\sqrt{3}}{6}$ も示される。

(4)　① より

$$4(1+4ab)^2 = (1+4a^2)(1+4b^2)$$

$$4(12a^2-1)b^2 + 32ab + 3 - 4a^2 = 0$$

$$b = \frac{-16a \pm \sqrt{16^2a^2+4(4a^2-3)(12a^2-1)}}{4(12a^2-1)}$$

$$= \frac{-16a \pm 2\sqrt{3}(4a^2+1)}{4(12a^2-1)}$$

$$= \frac{-8a \pm \sqrt{3}(4a^2+1)}{2(12a^2-1)} = \frac{4\sqrt{3}a^2-8a+\sqrt{3}}{2(12a^2-1)},\ \frac{-4\sqrt{3}a^2-8a-\sqrt{3}}{2(12a^2-1)}$$

$$= \frac{\cancel{(2\sqrt{3}a-1)}(2a-\sqrt{3})}{2\cancel{(2\sqrt{3}a-1)}(2\sqrt{3}a+1)},\ \frac{-(2\sqrt{3}a+1)(2a+\sqrt{3})}{2(2\sqrt{3}a-1)(2\sqrt{3}a+1)}$$

$a < -\frac{\sqrt{3}}{6}$，$b>0$ より　$b = \dfrac{2a-\sqrt{3}}{2(2\sqrt{3}a+1)}$ //

③

(1) $f(x) = x(1-\cos x)$ とする

$f'(x) = 1-\cos x + x\sin x.$

ここで $2n\pi < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ のとき、 $1-\cos x \geqq 0$.

$x\sin x \geqq 0$ となるので、 $f'(x) \geqq 0$.

すなわち、$f(x)$は単調に増加する。

$f(2n\pi) = 2n\pi(1-1) = 0.$

$f(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = (2n\pi + \frac{\pi}{2})(1-0) = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

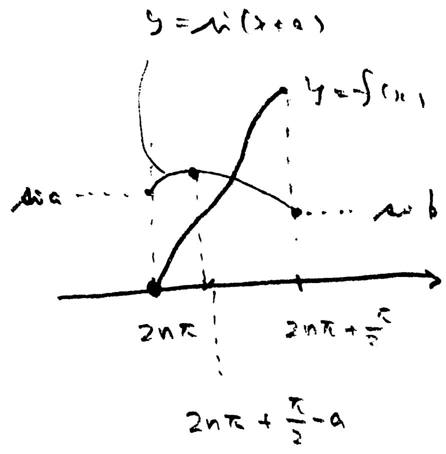
$\sin(2n\pi + a) = \sin a$

$\sin(2n\pi + \frac{\pi}{2} + a) = \cos a$

であることから

$y = \sin(x+a)$ のグラフは

右のようになる



よって、

$x(1-\cos x) = \sin(x+a)$ は

$2n\pi < x < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ の範囲で、

ただ1つの実数解をもつ。

(2) $2n\pi < x_n < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ …①

$x_n(1-\cos x_n) = \sin(x_n + a)$

$x_n = \dfrac{\sin(x_n+a)}{1-\cos x_n}$

①より

$\pi < \dfrac{x_n}{2n} = \dfrac{\sin(x_n+a)}{2n(1-\cos x_n)} < \pi + \dfrac{\pi}{4n}$

$\lim_{n\to\infty}(\pi + \frac{\pi}{4n}) = \pi$ だから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_n + a)}{2n(1-\cos x_n)} = \pi.$$

ここで $\lim_{n\to+\infty} |x_n + a| \leqq 1$ だから上の関係が成り

たつための必要条件は

$$\lim_{n\to\infty} (1-\cos x_n) = 0.$$

すなわち $\lim_{n\to\infty} \cos x_n = 1$ なので $\lim_{n\to\infty}(x_n - 2n\pi) = 0$

(3) $x_n - 2\pi n = y_n$ とおく

$x_n(1-\cos x_n) = \sin(x_n + a)$ より

$$(y_n + 2n\pi)(1 - \cos(y_n + 2n\pi)) = \sin(y_n + 2n\pi + a)$$

$$(y_n + 2n\pi)(1 - \cos y_n) = \sin(y_n + a)$$

両辺に $1 + \cos y_n$ をかけて

$$(y_n + 2n\pi)\sin^2 y_n = \sin(y_n + a)(1 + \cos y_n)$$

$$\left(\frac{y_n}{n} + 2\pi\right) n \cdot \frac{\sin^2 y_n}{y_n^2} \cdot y_n^2 = \sin(y_n + a)(1 + \cos y_n)$$

$$n y_n^2 = \frac{\sin(y_n + a)(1 + \cos y_n)}{\left(\frac{y_n}{n} + 2\pi\right) \cdot \frac{\sin^2 y_n}{y_n^2}}$$

$$\sqrt{n}\, y_n = \sqrt{\frac{\sin(y_n + a)(1 + \cos y_n)}{\left(\frac{y_n}{n} + 2\pi\right) \cdot \frac{\sin^2 y_n}{y_n^2}}}$$

$$\to \sqrt{\frac{\sin a \times (1+1)}{2\pi \times 1^2}} = \underline{\sqrt{\frac{\sin a}{\pi}}}$$

④

(1) $f(b) = ab = 6$

$(a, b) = (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$

よって、$f(b) = 6$ となる確率は $\dfrac{4}{36} = \underline{\dfrac{1}{9}}$ //

(2) $f(d) = ad^3 + bd^2 + cd = d(ad^2 + bd + c)$

となるが、$d \neq 1$ のとき $f(d)$ は d の倍数になるので $d = 1$.

このとき $f(1) = a + b + c$ となっている。

a, b, c はすべて 1〜6 までの整数なので

$3 \leqq a + b + c \leqq 18$

$a+b+c$ が素数になるとき、

$a + b + c = 3, 5, 7, 11, 13, 17.$

(i) $a+b+c = 3$ のとき

$(a, b, c) = (1, 1, 1)$

(ii) $a+b+c = 5$ のとき、

5個のボールを3つに分ける分け方を考える（0は不可）

5つのボールを並べて、2本の区切りをつけるとすると

○∧○∧○∧○∧○

4ヶ所のスキマのうち、2つを選んで区切ればよいので、

${}_4C_2 = 6$ 通り

これが、$a+b+c = 5$ を満たす組み合わせと一致する。

(iii) $a+b+c = 7$ のとき

(ii)と同じ。 ${}_6C_2 = 15$ 通り

(iv) $a+b+c = 11$ のとき、

(ii) と同様に考えると、$_{10}C_2 = 45$ 通り

となるが、この中には $(a, b, c) = (9, 1, 1)$ などと 6 を超えるものが含まれている。

9 が含まれているのは、(9, 1, 1) を並べた 3通り

8 〃 (8, 2, 1) を 〃 6通り

7 〃 (7, 3, 1) を 〃 6通り

(7, 2, 2) を 〃 3通り

あるので、

$$45 - 3 - 6 - 6 - 3 = 27 \text{ 通り}$$

(v) $a+b+c=13$ のとき

$a' = 7-a,\ b' = 7-b,\ c' = 7-c$ とすると

$1 \leqq a' \leqq 6,\ 1 \leqq b' \leqq 6,\ 1 \leqq c' \leqq 6$

$a+b+c=13 \iff 21-a'-b'-c'=13 \iff a'+b'+c'=8$

これは (ii) と同様に考えて、$_7C_2 = 21$ 通り

(vi) $a+b+c=17$ のとき

$(a, b, c) = (6, 6, 5), (6, 5, 6), (5, 6, 6)$ の 3通り

(i)〜(vi) より、(a, b, c, d) の組み合わせは

$$1+6+15+27+21+3 = 73$$

よってもとめる確率は $\dfrac{73}{6^4} = \dfrac{73}{1296}$

(3). $y = ax^2+bx+c$, $y = dx^2+ex+f$

2つのグラフの交点の x 座標をもとめる。連立すると

$$(a-d)x^2 + (b-e)x + c-f = 0$$

(i) $a \neq d$ のとき、判別式をDとして

$$D = (b-e)^2 - 4(a-d)(c-f) = 0$$

$$(b-e)^2 = 4(a-d)(c-f)$$

$-5 \leqq b-e \leqq 5$, かつ 右辺が4の倍数なので

$$b-e = -4, -2, 0, 2, 4$$

① $b-e = \pm 4$ のとき

$$4 = (a-d)(c-f)$$

$(a-d,\ c-f) = (4,1), (2,2), (1,4), (-4,-1), (-2,-2), (-1,-4)$

$a-d=4$ となるのは $(a,d) = (5,1), (6,2)$

$a-d=2$ 〃 $(a,d) = (3,1), (4,2), (5,3)(6,4)$

$a-d=1$ 〃 $(a,d) = (2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (6,5)$

などとなるので

$(a-d,\ c-f) = (4,1)$ …… $2 \times 5 = 10$ 通り

$(2,2)$ …… $4 \times 4 = 16$ 〃

$(1,4)$ …… $5 \times 2 = 10$ 〃

$(-4,-1), (-2,-2), (-1,-4)$ も同様

全ての組みあわせは $(10+16+10) \times 2 = 72$ 通り

$b-e=4$ は 2通り, $b-e=-4$ も 2通りあるので

$$4 \times 72 = 288 \text{ 通り}$$

②. $b-e = \pm 2$ のとき

$(a-d)(c-f) = 1$ となるので

$(a-d,\ c-f) = (1,1), (-1,1)$

① と同様に a, c, d, f の組み合わせは $5 \times 5 \times 2 = 50$ 通

$b-e = \pm 2$ となるのは $4+4=8$. よって $50 \times 8 = 400$ 通り

③ $b-e=0$ のとき

b, e は $(1,1)\sim(6,6)$ の 6通り.

このとき、$(a-d)(c-f)=0$ であるが、$a\neq d$ の範囲で考えているので.

$c-f=0$. これは、6通り

$a-d\neq 0$ 〃 30 〃

$6\times 6\times 30 = 1080$.

①②③より $a\neq d$ のときは $288+400+1080=1768$

(ii) $a-d=0$ のとき

$a-d=0$ となるのは 6通り.

このとき、

$(b-e)x+c-f=0$ は

① $b-e\neq 0$ のとき、1つの実数解をもつが、

$b-e\neq 0$ は 30通り、c, f はそれぞれ 6通りあるので

$30\times 6\times 6 = 1080$ 通り.

② $b-e=0$ のとき、

$c-f=0$

となるが、このとき x は解をもたないか任意の実数となるので不適

①②より $a-d=0$ のときは $1080\times 6=6480$

(i)(ii) 全てをまとめて、もとめる確率は

$$\frac{6480+1768}{6^6}=\frac{8248}{6^6}=\frac{1031}{5832}$$