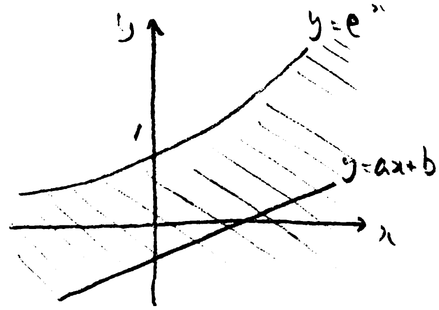
① (1) LがDに含まれるのは、全てのxについて

$e^x \geqq ax+b$ となるときなので、

$e^x-(ax+b)=f(x)$ として、全ての

実数xについて $f(x)\geqq 0$ となる条件を考える。



$f'(x)=e^x-a$

(i) $a>0$のとき、　$f'(x)=0$ となるのは $x=\log_e a$。

だから、$f(x)$の増減は右のようになる。

x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

$f(\log a)=a-a\log a-b\geqq 0$.

$b\leqq a-a\log a$, $a>0$.

(ii) $a=0$のとき、　$e^x-b\geqq 0$ が常に成り立つのは $b\leqq 0$のとき。

(iii) $a<0$のとき、　$f'(x)$は常に正となる

$\lim_{x\to-\infty}(e^x-ax-b)=-\infty$ 　となるので、$f(x)\geqq 0$は常には成り立たない

以上より　$b\leqq a-a\log a$, $(a>0)$　　$b\leqq 0$ $(a=0)$

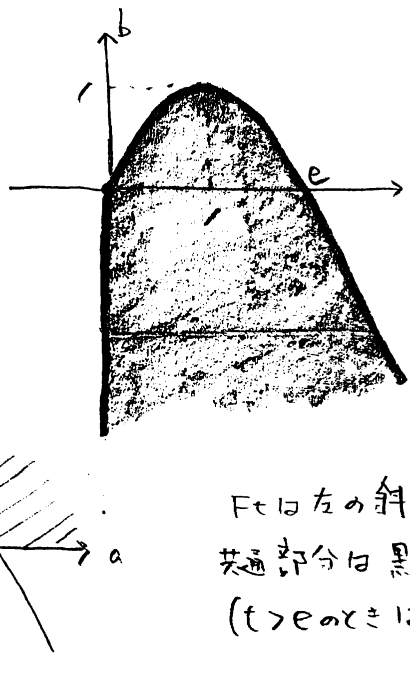
$g(a)=a-a\log a$ として $g'(a)=1-1-\log a=-\log a$.

$g'(a)=0$ を解くと、$a=1$。だから$g(a)$の増減は右のとおり。

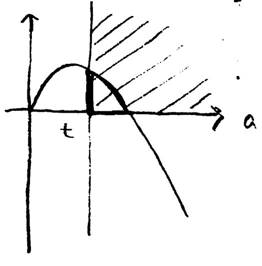
a	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(a)$	$+$	0	$-$
$g(a)$	↗		↘

問題文より　$\lim_{a\to+0}g(a)=0$ また $\lim_{a\to+\infty}g(a)=-\infty$　　$g(1)=1$

以上より　集合Eは下のグラフの黒ぬり部となる(境界含む)



(2)



F_tは左の斜線部だから　EとF_tの

共通部分は黒枠部

($t>e$のときは $t\to+0$ と考えれば良いので考慮しない)

$$S(t) = \int_t^e a - a\log a \, da$$

$$= \left[\frac{1}{2}a^2 \right]_t^e - \left\{ \left[\frac{a^2}{2} \log a \right]_t^e - \frac{1}{2}\int_t^e a \, da \right\}$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}e^2} - \frac{1}{2}t^2 - \cancel{\frac{e^2}{2}} + \frac{t^2}{2}\log t + \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}t^2$$

$$= -\frac{3}{4}t^2 + \frac{t^2}{2}\log t + \frac{1}{4}e^2$$

$$\lim_{t \to +0} S(t) = \lim_{t \to +0} \left\{ -\frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}t(t\log t) \right\} = \underline{\frac{1}{4}e^2}$$

② (1) pを5で割った商をa、余りをbとする。 $\left(a=\left[\frac{p}{5}\right]\text{となる}\right)$

このときbの値によってサイコロの目を次のように出せば最も早く到達する

b	5の目	3の目	1の目	$N(p,0)$
0	a	0	0	a
1	a	0	1	$a+1$
2	a	0	2	$a+2$
3	a	1	0	$a+1$
4	a	1	1	$a+2$

よって $\quad \left[\frac{p}{5}\right] \leqq N(p,0) \leqq \left[\frac{p}{5}\right]+2.$

同様に、qを3で割った商をc、余りをdとして $\left(c=\left[\frac{q}{3}\right]\right)$

d	6の目	4の目	2の目	$N(0,q)$
0	c	0	0	c
1	c	0	1	$c+1$
2	c	1	0	$c+1$

よって $\quad \left[\frac{q}{3}\right] \leqq N(0,q) \leqq \left[\frac{q}{3}\right]+1$

(2) (1)より

$$\left[\frac{an}{5}\right] \leqq N(an,0) \leqq \left[\frac{an}{5}\right]+2$$

$$\left[\frac{bn}{3}\right] \leqq N(0,bn) \leqq \left[\frac{bn}{3}\right]+1$$

したがって

$$\left[\frac{an}{5}\right]+\left[\frac{bn}{3}\right] \leqq N(an,bn) \leqq \left[\frac{an}{5}\right]+\left[\frac{bn}{3}\right]+3$$

また $\quad x-1<[x] \leqq x$ だから

$$\frac{an}{5}+\frac{bn}{3}-2 < N(an,bn) \leqq \frac{an}{5}+\frac{bn}{3}+3$$

$$\frac{\frac{an}{5}+\frac{bn}{3}-2}{(a+b)n} < \frac{N(an,bn)}{(a+b)n} \leqq \frac{\frac{an}{5}+\frac{bn}{3}+3}{(a+b)n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{an}{5}+\frac{bn}{3}-2}{(a+b)n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{5}+\frac{b}{3}-\frac{2}{n}}{a+b} = \frac{\frac{a}{5}+\frac{b}{3}}{a+b} = \frac{3a+5b}{15(a+b)}$$

同様に $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{an}{5}+\frac{bn}{3}+3}{(a+b)n}=\frac{3a+5b}{15(a+b)}$

はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(an,bn)}{(a+b)n}=\underline{\frac{3a+5b}{15(a+b)}}$

(3) $b\neq 0$ のとき

$$R(a,b)=\frac{3a+5b}{15(a+b)}=\frac{3\cdot\frac{a}{b}+5}{15\left(\frac{a}{b}+1\right)}=\frac{1}{5}+\frac{2}{15\left(\frac{a}{b}+1\right)}$$

これが最大となるのは $a=0$ のときで $\frac{1}{5}+\frac{2}{15}=\frac{1}{3}$

$a\to\infty$ のとき $R(a,b)\to\frac{1}{5}$

$b=0$ のとき $R(a,b)=\frac{3a}{15a}=\frac{1}{5}$

よって $a=0$ のとき $R(a,b)$ は最大 $\frac{1}{3}$

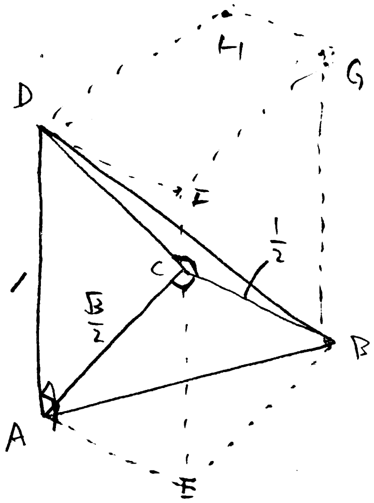
$b=0$ 〃 〃 最小 $\frac{1}{5}$

③ (1) $DC^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$

$DC = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$BD^2 = BC^2 + CD^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = 2$

$BD = \sqrt{2}$

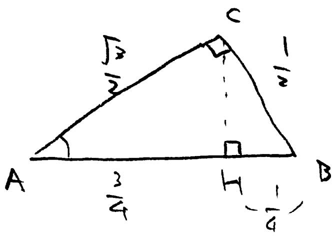


(2) △ABCは∠C＝90°

BC : AC ＝ 1 : √3 だから ∠BAC＝30°

CからABに下ろした垂線の足をHとして

$CH = AC \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$



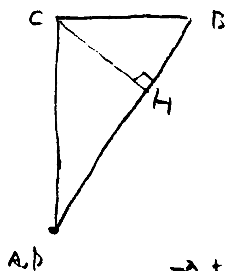
(3) CからABDに下ろした垂線の足はHとなるので ABCDのαに対する影は

△ABDと同じ形になる。

$AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

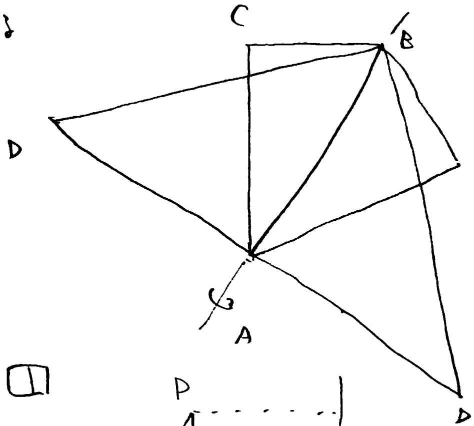
だから△ABDの面積は $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$

$\therefore S = \frac{1}{2}$

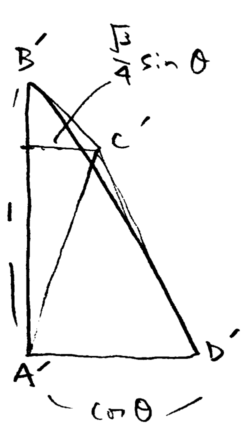


頂点D→Aと見た図

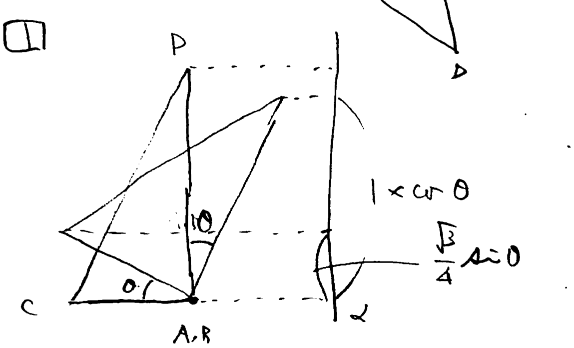
(4) ①の図のようにαとABDのなす角がθとなったときの影は②のようになっている



②



①



A→Bと見た図

④(1) $x+X=0+n-1 \iff x=n-1-X$ を $f_n(x)$ に代入

$$f_n(x)=(n-1-X)(n-2-X)\cdots(n-1-X-n+1)$$
$$=(n-1-X)(n-2-X)\cdots(1-X)(-X)$$

nは2以上の偶数だから、上はXのn次式で、

$$=(X-n+1)(X-n+2)\cdots(X-1)(X)$$
$$=X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)$$

この結果は $f_n(X)$ が、$x=\dfrac{n-1}{2}$ について対称であることを示している

$\left(\because \dfrac{x+X}{2}=\dfrac{n-1}{2},\ f_n(x)=f_n(X)\right)$

(2) $f_n(n)=n(n-1)\cdots1=n!$, $f_n(-1)=(-1)(-2)\cdots(-n)=n!$

なので、2つの実数解は $\cancel{x=}-1, n$

$x<-1$ のとき $f_n(x)>n!$, $x>n$ のとき $f_n(x)>n!$ は、

n次関数の概形より明らかなので、$-1<x<n$ において、

$|f_n(x)|<n!$ を示す。

$0\leqq m\leqq n$ を満たす整数mを考える

(i) $m-1<x<m$ のとき

$x=m+\alpha$ (αは $0<\alpha<1$ を満たす実数) とおけるので

$$|f_n(x)|=|f_n(m+\alpha)|$$
$$=|(m+\alpha)(m+\alpha-1)\cdots(1+\alpha)\alpha(\alpha-1)\cdots(m+\alpha-n+1)|$$
$$<(m+1)m(m-1)\cdots2\times1\times1\times2\times\cdots(n-m)$$
$$<n!$$

(ii) $x=m$ のとき $f_n(x)=f_n(m)=0$.

よって $-1<x<n$ において $|f_n(x)|<n!$

となるので、$f_n(x)=n!$ は、ちょうど2つの実数解をもつ。

その実数解は、$\underline{-1,\ n}$