① (1) $a_n - \alpha = \dfrac{1}{b_n}$ とおく.

$a_n = \dfrac{1}{b_n} + \alpha$ を与漸化式に代入

$$\frac{1}{b_{n+1}} + \alpha = 1 + \frac{1}{\frac{1}{b_n} + \alpha}$$

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{b_n + 1 + \alpha b_n - \alpha - \alpha^2 b_n}{1 + \alpha b_n}$$

$$b_{n+1} = \frac{1 + \alpha b_n}{(1+\alpha-\alpha^2) b_n + 1 - \alpha}$$

ここで $1+\alpha-\alpha^2 = 0$ となるように α を定めると $\alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

であり, このとき

$$b_{n+1} = \frac{\alpha}{1-\alpha} b_n + \frac{1}{1-\alpha} = -\alpha^2 b_n - \alpha \qquad (\because \alpha - \alpha^2 = -1)$$

$$\Leftrightarrow \quad b_{n+1} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} = -\alpha^2 \left(b_n + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \right)$$

$$b_n + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} = (-\alpha^2)^{n-1} \left(b_1 + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \right)$$

$b_1 = \dfrac{1}{a_1 - \alpha} = \dfrac{1}{1-\alpha}$ だから $b_n = (-\alpha^2)^{n-1} \left(\dfrac{1}{1-\alpha} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha^2} \right) - \dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{(-\alpha^2)^{n-1} \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \right) - \frac{\alpha}{1+\alpha^2}} + \alpha$$

$$= \frac{1}{(-1-\alpha)^{n-1} \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{2+\alpha} \right) - \frac{\alpha}{2+\alpha}} + \alpha$$

$$= \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{(-1-\alpha)^{n-1} (2+\alpha+\alpha-\alpha^2) - \alpha(1-\alpha)} + \alpha$$

$$= \frac{1-2\alpha}{(-1-\alpha)^{n-1}(1+\alpha) + 1} + \alpha$$

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) + 1} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(2) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

② (1) 必ず表になっている硬貨の番号をひくので

1〜5から n 通りを引けばよい。 $\dfrac{{}_5P_n}{6^n} = \dfrac{5!}{6^n(5-n)!}$

(2) 6の目で場合分けして

(i) 6の目が4回　1通り

(ii) 〃 3回　必ず1つは裏になる　0通り

(iii) 〃 2回　6以外は1〜5の同じ目。 ${}_5C_1 \times \dfrac{4!}{2!2!} = 30$ 通り

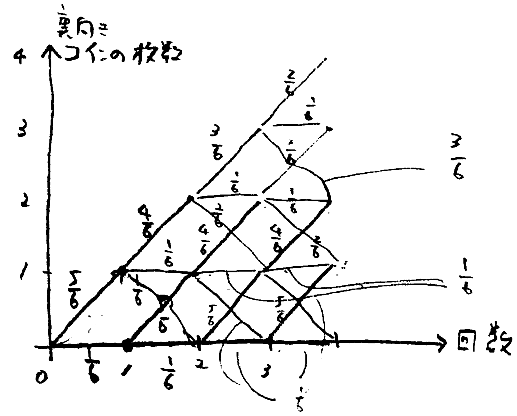
(iv) 〃 1回　必ず1つ以上が裏になる　0通り

(v) 〃 0回　1〜5から同じ目が4回、または、2種の目が2回ずつ

$${}_5C_1 \times 1^4 + {}_5C_2 \times \frac{4!}{2!2!} = 65$$

まとめると $\dfrac{1+30+65}{6^4} = \dfrac{16}{6^3} = \dfrac{2}{27}$

(3)



$$P(4) = \frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{6} = \frac{120}{6^4}$$

$$P(3) = \frac{1}{6^4}(5\times4\times3\times1 + 5\times4\times1\times3 + 5\times1\times4\times3 + 1\times5\times4\times3)$$

$$= \frac{1}{6^4}(60+60+60+60) = \frac{240}{6^4}$$

$$P(2) = \frac{1}{6^4}(5\cdot4\cdot3\cdot3 + 5\cdot4\cdot1\cdot1 + 5\cdot4\cdot2\cdot4 + 5\cdot1\cdot4\cdot1 + 5\cdot1\cdot1\cdot4 + 5\cdot1\cdot5\cdot4 + 1\cdot1\cdot5\cdot4 + 1\cdot5\cdot4\cdot1 + 1\cdot5\cdot1\cdot4)$$

$$= \frac{1}{6^4}(180+20+160+20+20+100+20+20+20)$$

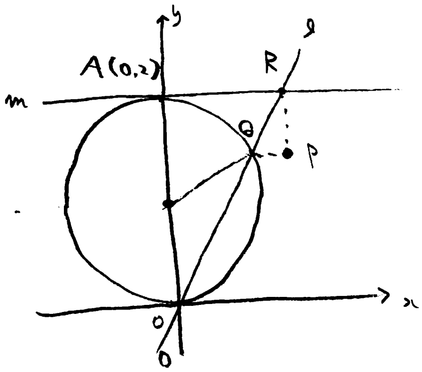
$$= \frac{1}{6^4}(560) = \frac{560}{6^4}$$

$$P(1) = \frac{1}{6^4}(5\cdot4\cdot1\cdot2 + 5\cdot4\cdot2\cdot1 + 5\cdot1\cdot4\cdot2 + 5\cdot1\cdot1\cdot1 + 5\cdot1\cdot1\cdot1 + 5\cdot1\cdot5\cdot1 + 5\cdot1\cdot1\cdot5 + 1\cdot5\cdot4\cdot2 + 1\cdot5\cdot1\cdot1 + 1\cdot5\cdot1\cdot5 + 1\cdot1\cdot5\cdot1 + 1\cdot1\cdot1\cdot5)$$

$$= \frac{1}{6^4}(40+40+40+5+25+5+25+40+5+25+5+5) = \frac{1}{6^4}\times280$$

$$\sum_{t=1}^{4} tP(t) = \frac{1}{6^4}(1\times280 + 2\times560 + 3\times240 + 4\times120) = \frac{2600}{6^4} = \frac{325}{162}$$

③



$Q(\cos\theta,\ 1+\sin\theta)$ とおく.

lは $y=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}x$ で $y=2$ のとき

$$x=\frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta} \quad (\theta \neq 90^\circ)$$

Rは $\left(\dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta},\ 2\right)$ $(\theta \neq 90^\circ$のとき$)$

$\theta=90^\circ$のときは Rは$(0,2)$

Pは $\left(\dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta},\ 1+\sin\theta\right)$ $(\theta \neq 90^\circ)$

または $(0,2)$ $(\theta=90^\circ)$

$\theta \neq 90^\circ$のとき

$P(X,Y)$として $X=\dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}$, $Y=1+\sin\theta$

$$XY=2\cos\theta$$

$\cos\theta=\dfrac{XY}{2}$, $\sin\theta=Y-1$ より $\left(\dfrac{XY}{2}\right)^2+(Y-1)^2=1$

$$\frac{1}{4}X^2Y^2+Y^2-2Y+\cancel{1}=\cancel{1}$$

$$X^2Y^2+4Y^2-8Y=0$$

$$Y(X^2Y+4Y-8)=0.$$

$\theta \neq 90^\circ$のとき $Y \neq 0$ だから, $X^2Y+4Y-8=0$

$Y=\dfrac{8}{4+X^2}$ $\therefore$ Pの軌跡は $y=\dfrac{8}{x^2+4}$

$\theta=90^\circ$のとき Pは$(0,2)$で 上式は,これも満たしている.

$\therefore$ Pの軌跡は $y=\dfrac{8}{x^2+4}$

(2) $f'(x)=\dfrac{-16x}{(x^2+4)^2}$ $f'(x)=0$ となるのは $x=0$.

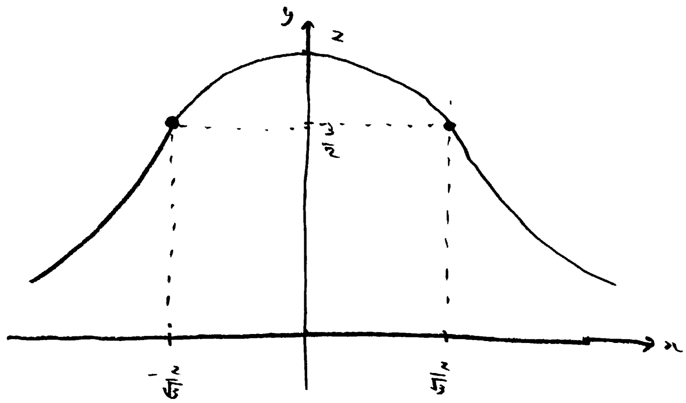
$$f''(x)=\frac{-16(x^2+4)^2+16x\times2(x^2+4)\times2x}{(x^2+4)^4}=\frac{-16x^2+64x^2-64}{(x^2+4)^3}=\frac{16(3x^2-4)}{(x^2+4)^3}$$

$f''(x)=0$ となるのは $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

x	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{3}{2}$	↗	2	↘	$\frac{3}{2}$	↘

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$



(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{8}{x^2+4}\,dx$

$x = 2\tan\theta$ とおくと. $\quad \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{2}{\cos^2\theta}$

x	$-2 \to 2\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{3}$

$$\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{8}{x^2+4}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{8}{4\tan^2\theta+4} \times \frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4\,d\theta = \Big[4\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{3}\pi + \pi = \underline{\frac{7}{3}\pi}$$