①

(1) 右辺 − 左辺 $= x+1-\frac{\pi}{4}-\tan x = f(x)$ とする

$f'(x) = 1-\frac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x$

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ のとき　$0 \leqq \tan x \leqq 1$ だから　$-1 \leqq \tan^2 x \leqq 1$ となり、

$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ で単調に減少する。

また $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}+1-\frac{\pi}{4}-1=0$ となるので、$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ において、$f(x) \geqq 0$

よって　$\tan x \leqq x+1-\frac{\pi}{4}$　$(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4})$ が成りたつことが示された。

(2)
$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ において、

$0 \leqq \tan^n x \leqq (x+1-\frac{\pi}{4})^n$ より

$$0 \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1-\frac{\pi}{4})^n dx \quad \cdots ①$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1-\frac{\pi}{4})^n dx = \left[\frac{1}{n+1}(x+1-\frac{\pi}{4})^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}(1-\frac{\pi}{4})^{n+1}$$

ここで　$3<\pi<4$ だから、　$0<1-\frac{\pi}{4}<\frac{1}{4}$ なので、$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\pi}{4})^{n+1}=0$.

であり　$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}(1-\frac{\pi}{4})^{n+1}\right\}=0$

これと①より はさみうちの原理により、$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\, dx = 0$

$\therefore \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

(3)

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,(1+\tan^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,(\tan x)' dx = \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\frac{1}{n+1}}$$ //

(4)

(3)より $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$

ここで $n = 2k-1$ とすると

$$I_{2k-1} + I_{2k+1} = \frac{1}{2k} \quad \cdots ②$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ (-1)^{k+1} \left(I_{2k-1} + I_{2k+1} \right) \right\}$$

$$= (I_1 + \cancel{I_3}) - (\cancel{I_3} + \cancel{I_5}) + (\cancel{I_5} - \cancel{I_7}) - \cdots + (-1)^{n+1} (\cancel{I_{2n-1}} + I_{2n+1})$$

$$= I_1 + (-1)^{n+1} I_{2n+1}$$

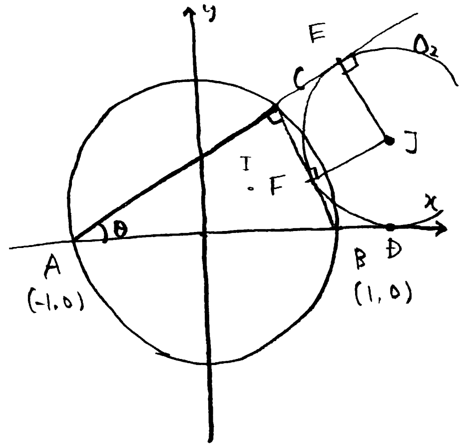
(2)より $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1} = 0$ となるので

$$\lim_{n\to\infty} \left(I_1 + (-1)^{n+1} I_{2n+1} \right) = I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx$$

$$= -\left[\log|\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\log 2^{-\frac{1}{2}} + \log 1 = \frac{1}{2}\log 2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \frac{1}{2}\log 2$$

②



(1) $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2\cos\theta \times 2\sin\theta = \underline{\sin 2\theta}$

(2) 3辺の長さは $2\cos\theta$, $2\sin\theta$, 2.

$\triangle ABC$の面積はr_1を用いて.

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}(2 + 2\cos\theta + 2\sin\theta) \times r_1$$

これと(1)の結果より.

$$(1 + \cos\theta + \sin\theta) r_1 = \sin 2\theta$$

$$\underline{r_1 = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos\theta + \sin\theta}}$$

(3)

(i) AE, AD は A を通り O_2と接する接線なので $AE = AD$

同様に $CE = CF$, $BF = BD$.

$$AE = AD \iff AC + CE = AB + BD$$

$$\iff 2\cos\theta + CF = 2 + BF$$

$$\iff 2\cos\theta + CF = 2 + BC - CF$$

$$\iff 2CF = 2 - 2\cos\theta + BC$$

$$\iff CF = 1 - \cos\theta + \sin\theta$$

$$AD = AE = AC + CF = 2\cos\theta + 1 - \cos\theta + \sin\theta = \underline{1 + \cos\theta + \sin\theta}$$

(ii) $CE = CF$ かつ $\angle ECF = \angle CEJ = \angle CFJ = 90^\circ$ だから

CEJF は正方形.

$$\therefore r_2 = CF = \underline{1 - \cos\theta + \sin\theta}$$

$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta-\sin\theta}$ と同値です

(iii) $\frac{r_2}{r_1} = \frac{(1+\cos\theta+\sin\theta)(1-\cos\theta+\sin\theta)}{\sin 2\theta} = 2$ より

$$1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta - \cos^2\theta = 2\sin 2\theta$$

$$2\sin\theta + 2\sin^2\theta = 4\sin\theta\cos\theta$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ だから $\sin\theta \neq 0$ なので

$$1 + \sin\theta = 2\cos\theta$$

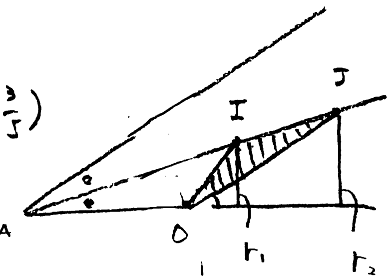
$$\sin\theta = 2\cos\theta - 1$$

これと $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を連立して

$$\cos^2\theta + 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 1$$

$$(5\cos\theta - 4)\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta = \frac{4}{5} \quad \left(\sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}\right)$$



$$\triangle AOI = \triangle AOJ - \triangle AOI$$

$$= \frac{1}{2}AO \times r_2 - \frac{1}{2}AO \times r_1$$

$$= \frac{1}{2}AO(r_2 - r_1)$$

$$= \frac{1}{2}AO \times r_1$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5}}{1 + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}}$$

$$= \frac{1}{5}$$

③

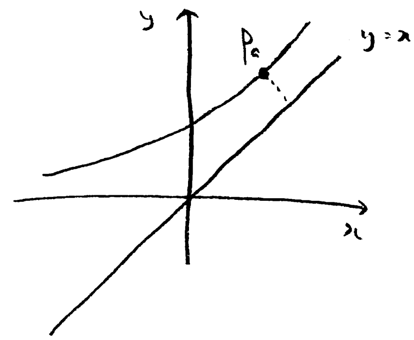
(1) $f(x)=e^{ax}-x$ とおく.

$f'(x)=ae^{ax}-1$

$f'(x)=0$ となるのは $ae^{ax}=1$ より

$e^{ax}=\frac{1}{a} \Leftrightarrow ax=-\log a \Leftrightarrow x=-\frac{1}{a}\log a$

これを α と表すと $f(x)$ の増減は次のようになる



x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

また $f(\alpha)=e^{-\log a}+\frac{1}{a}\log a=\frac{1}{a}(1+\log a)$

となり, $f(\alpha)>0$ となるのは $1+\log a>0 \Leftrightarrow a>\frac{1}{e}$ のとき.

よって $a>\frac{1}{e}$ のとき. $f(x)$ は常に正の値をとり, このとき C_a と $y=x$ は共有点をもたない.

(2)(i) $P\ (t, e^{at})$ とする これと $x-y=0$ との距離を $l(t)$ とすると

$l(t)=\frac{|t-e^{at}|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{at}-t)$ $\quad (\because (1)$ より $e^{ax}-x>0)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}f(t)$

これは(1)より $t=\alpha$ のとき最小となるので $d(a)=l(\alpha)=\underline{\frac{\sqrt{2}}{2a}(1+\log a)}$ //

(ii) $y'=(e^{ax})'=ae^{ax}$

$ae^{a\alpha}=1$ となるので傾きは 1

(iii) $P_a\ (\alpha, e^{a\alpha})=(X, Y)$ とする

$X=-\frac{1}{a}\log a$, $Y=\frac{1}{a}$, $a>\frac{1}{e}$ を整理すると

$0<Y<e$, $X=+Y\log Y$

$$X = Y\log Y \quad , \quad 0 < Y < e$$

よって、もとめる軌跡は $x = y\log y \quad (0 < y < e)$

両辺を y で微分して

$$\frac{dx}{dy} = \log y + 1$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{y}$$

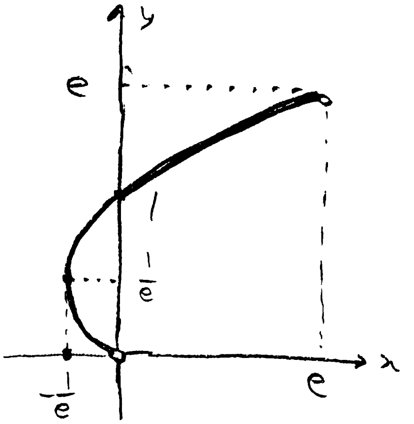
y	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e
$\frac{dx}{dy}$		$-$	0	$+$	
$\frac{d^2x}{dy^2}$		$+$		$+$	
x		↶		↱	

$\frac{dx}{dy} = 0$ となるのは $y = \frac{1}{e}$, $\frac{d^2x}{dy^2} > 0$

$y = \frac{1}{e}$ のとき $x = \frac{1}{e}\log e^{-1} = -\frac{1}{e}$

$x = 0$ のとき $y = 0, 1.$

$y = e$ のとき $x = e$



(3)

$$\frac{d(a)}{da} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1-(\log a + 1)}{a^2} = -\frac{\log a}{\sqrt{2}\,a^2}$$

$d'(a) = 0$ となるのは $a = 1$

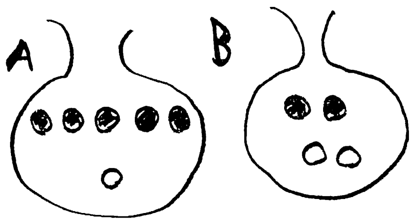
$$d(1) = \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 1}(1+\log 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$d'(a)$	/	$+$	0	$-$
$d(a)$	/	↗		↘

$\therefore$ $d(a)$ は $a = 1$ のとき

最大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ をとる

④



(1) Aから 赤2つ $\frac{{}_5C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{3}$ 赤1つ $\frac{{}_5C_1\times{}_1C_1}{{}_6C_2}=\frac{1}{3}$

Bから 赤2つ $\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$, 赤1つ $\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{2}{3}$. 赤0つ $\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$

(i) Aから赤2つをとり 合計4つ以上

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

(ii) Aから赤1つをとり 合計4つ以上（最大3となっている）

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$$

(i)(ii)より $\frac{5}{9}+\frac{1}{18}=\frac{11}{18}$

(2)
(i) Aを選んで赤玉

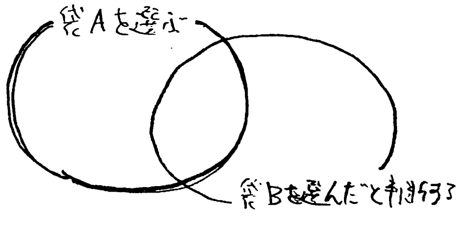
$$\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$$

(ii) Bを選んで赤玉

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$$

(i)(ii)より $\frac{5}{12}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$

(3)



袋Aを選んだときに袋Bを選んだと判断するのは、白玉を1つ選んだときで(1)より、$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

袋Bを選んだときに袋Bを選んだと判断するのは、$\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{12}$.

よってもとめる確率は $\frac{1}{6}\div\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{12}\right)=\frac{2}{7}$