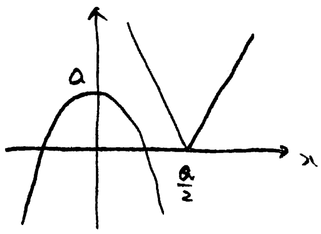
① (1) $x^2+|2x-a|-a>0 \iff |2x-a|>a-x^2$

$y=|2x-a|$ と $y=a-x^2$ のグラフについて、xの値にかかわらず、$y=|2x-a|$が

$y=a-x^2$の上側にあればよい。

(i) $a>0$ のとき



左図のようになれば良いので

$y=-2x+a$ と $y=a-x^2$ が共有点を

もたない条件を考える。

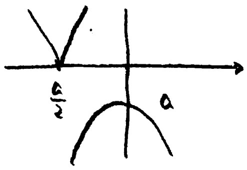
連立して、$-2x+a=a-x^2$

$x^2-2x=0$.

必ず共有点をもってしまうので解はない

(ii) $a=0$ のとき　$y=|2x|$, $y=-x^2$ となるので $(0,0)$ を共有点にもってしまう

(iii) $a<0$ のとき

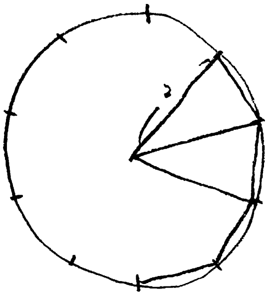


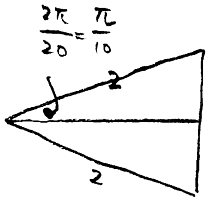
左図のようになるので $y=|2x-a|$ は必ず $y=a-x^2$ の

上側にある

(i)〜(iii)より、 $\underline{a<0}$

(2)





1辺の長さは

$$\left(2\sin\frac{2\pi}{20}\right)\times 2 = 4\sin\frac{\pi}{10}$$

$\frac{\pi}{10} = \theta$ とする. $\left(5\theta = \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin 3\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)$$

$$\sin 3\theta = \cos 2\theta$$

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$4\sin^3\theta - 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$$

$$(\sin\theta - 1)(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1) = 0$$

$$\sin\theta = 1,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$0 < \sin\theta < 1$ だから $\left(\because \theta = \frac{\pi}{10}\right)$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

∴ 1辺の長さは $\underline{\sqrt{5}-1}$ 〃

(3) $X = 2^a\cdot 3^b$, $Y = 2^3\cdot 3^3\cdot 5^2$ $(=5400)$

$16200 = 2^3\cdot 3^4\cdot 5^2$

以上より $1 \leqq a \leqq 3$, $b = 4$,

$X^n = 2^{an}3^{bn}$ であり, X^n の約数は $2^{a'}3^{b'}$ $(0 \leqq a' \leqq an,\ 0 \leqq b' \leqq bn)$ より

$$(1+an)(1+bn) = 221 = 13\times 17$$

$b=4$ だから $1+4n = 13$ または 17. $n = 3, 4$

$n=3$ のとき. $1+3a = 17$ $a = \frac{16}{3}$ … 不適

$n=4$ 〃 $1+4a = 13$ $a = 3$ ∴ $(a, b, n) = (3, 4, 4)$

$a+b+n = \underline{11}$ 〃

(4) $OP=1,\ OQ=1,\ PQ=\sqrt{2}$ より $\triangle OPQ$ は $\angle POQ=90^\circ$ の直角二等辺三角形

したがってP, Qの偏角を α, β として　$|\alpha-\beta|=90^\circ$ が成り立っている。

$P(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $Q(\cos\beta, \sin\beta)$, $R(2, 3)$ だから

$$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR})=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}+|\overrightarrow{OR}|^2$$

$$=0-2\cos\alpha-3\sin\alpha-2\cos\beta-3\sin\beta+13$$

$$=-2\times2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-3\times2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+13$$

$|\alpha-\beta|=90^\circ$ より $\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm45^\circ$ だから

$$=-2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-3\sqrt{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+13$$

$$=13-\sqrt{26}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{3}{\sqrt{13}}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$=13-\sqrt{26}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\theta\right)$$　ただし、θ は $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$ を満たす角

よって $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$ の最小値は $\underline{13-\sqrt{26}}$

② $x^2+y^2+z^2-4ax-2y+az-16a-4=0$

(1) 球の内部は　$x^2+y^2+z^2-4ax-2y+az-16a-4<0$

と表される.

Aが内部にあることから.　$1+9+4-4a-6+2a-16a-4<0$　　$a>\frac{2}{9}$

B　〃　$4+1+4+8a-2+2a-16a-4<0$　　$a>\frac{1}{2}$

O　〃　$-16a-4<0$　　$a>-\frac{1}{4}$

同時に満たせばよいので　$\underline{a>\frac{1}{2}}$

(2) ABを $t:1-t$ に内分する点は.

$(1-t)\vec{OA}+t\vec{OB}=\begin{pmatrix}1-3t\\3-2t\\2\end{pmatrix}$

これが球面上にあるとき

$(1-3t)^2+(3-2t)^2+2^2-4a(1-3t)-2(3-2t)+2a-16a-4=0$

$\Leftrightarrow$　$13t^2-14t+12at+4-18a=0$.

左辺を $f(t)$ として. $y=f(t)$ のグラフが $0\leqq t\leqq 1$ の範囲で t 軸と交わるための条件を考える

$f(t)=13\left(t-\frac{7-6a}{13}\right)^2+4-18a-\frac{(7-6a)^2}{13}$

(i) $\frac{7-6a}{13}\leqq 0$ のとき　$f(0)=4-18a\leqq 0$ かつ $f(1)=3-6a\geqq 0$

$\Leftrightarrow$ $a\geqq\frac{7}{6}$ かつ $a\geqq\frac{2}{9}$ かつ $a\leqq\frac{1}{2}$　　解なし.

(ii) $0<\frac{7-6a}{13}<1$ のとき　$\left(-1<a<\frac{7}{6}\right)$

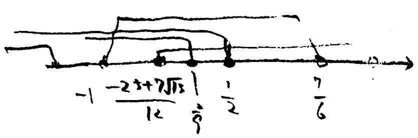
判別式をDとして　$D/4=(7-6a)^2-13(4-18a)\geqq 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $12a^2+50a-1\geqq 0$.　$\Leftrightarrow$　$a\geqq\frac{-25+7\sqrt{13}}{12}$ または $a\leqq\frac{-25-7\sqrt{13}}{12}$

このとき $f(0)\geqq 0$ または $f(1)\geqq 0$ の少なくとも一方が成り立てばよい

$a\leqq\frac{2}{9}$ または $a\leqq\frac{1}{2}$　$\Leftrightarrow$　$a\leqq\frac{1}{2}=\frac{-25+31}{12}$

だから　31と $7\sqrt{13}$ の大小を調べると　$31^2-(7\sqrt{13})^2=324>0$



$\frac{-25+7\sqrt{13}}{12}<\frac{1}{2}$

同様に　$\frac{2}{9}>\frac{-25+7\sqrt{13}}{12}$

よって　$\frac{-25+7\sqrt{13}}{12}\leqq a\leqq\frac{1}{2}$

(iii) $\dfrac{7-6a}{13} \geqq 1$ のとき $(a \leqq -1)$

$f(0) \leqq 0$ かつ $f(1) \geqq 0$ $\Leftrightarrow$ $a \leqq \dfrac{2}{9}$ かつ $a \geqq \dfrac{1}{2}$ …存在しない

(i)〜(iii)より

$$\underline{\dfrac{-25+7\sqrt{15}}{12} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}}$$

③ (1) $P_1(k)$ について.

裏がk回連続し、$k+1$回目に表. $P_1(k)=(1-p)^k p$.

$P_2(k)$について.

$k+1$回目までにk回裏がでて1回表が出る. $k+2$回目に表.

$$P_2(k)=(1-p)^k p\ {}_{k+1}C_1\times p = (k+1)(1-p)^k p^2$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP_1(k)=\sum_{k=0}^{n} kp(1-p)^k = S$とおく

$$S = 0 + 1\cdot p(1-p)^1 + 2\cdot p(1-p)^2 + \cdots + np(1-p)^n$$

$$-)\ (1-p)S = \quad 0 \quad 1\cdot p(1-p)^2 + \cdots (1-n)p(1-p)^n + np(1-p)^n$$

$$\cancel{p}S = \cancel{p}(1-p)+\cancel{p}(1-p)^2+\cdots+\cancel{p}(1-p)^n - n\cancel{p}(1-p)^n$$

$$S=(1-p)\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} - n(1-p)^n = \frac{(1-p)}{p}(1-(1-p)^n)-n(1-p)^n$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} kP_1(k) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-p}{p}\{1-(1-p)^n\}-n(1-p)^n\right)=\frac{1-p}{p}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP_2(k) = \sum_{k=0}^{n}\{k(k+1)(1-p)^k p^2\} = T$とおく

$$T = 0 + 1\cdot 2\cdot p^2(1-p) + 2\cdot 3\cdot p^2(1-p)^2 + \cdots + n(n+1)p^2(1-p)^n$$

$$-)\ (1-p)T = \quad 0 \quad 1\cdot 2\,p^2(1-p)^2+\cdots + (n-1)n\,p^2(1-p)^n + n(n+1)p^2(1-p)^{n+1}$$

$$\cancel{p}T = 2p^{\cancel{2}}(1-p)+4p^{\cancel{2}}(1-p)^2+\cdots+2np^{\cancel{2}}(1-p)^n - n(n+1)p^{\cancel{2}}(1-p)^{n+1}$$

$$T = 2S - n(n+1)p(1-p)^{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} T = \lim_{n\to\infty}\{2S - n^2p(1-p)^{n+1} - np(1-p)^{n+1}\} = 2\times\frac{1-p}{p} = \underline{\frac{2(1-p)}{p}}$$