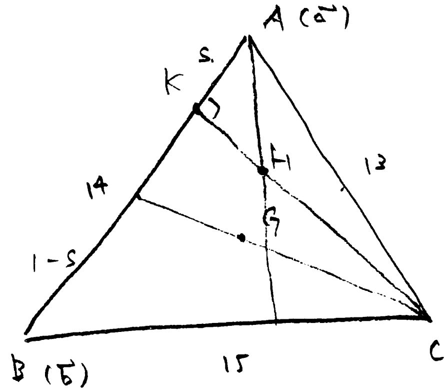
① (1) $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC}) = \underline{\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}$ //



(2) AB上にあり CK⊥ABとなる点をKとする

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 15^2+13^2-2\vec{a}\cdot\vec{b} = 14^2$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 99$

KがABを $s:1-s$ に内分するとすると

$\overrightarrow{CK} = s\vec{b}+(1-s)\vec{a}$.

CK⊥ABより.

$(s\vec{b}+(1-s)\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 225s+(1-2s)99-169(1-s)$

$= 196s-70 = 0 \qquad s = \frac{70}{196} = \frac{35}{98} = \frac{5}{14}$

$\overrightarrow{CK} = \frac{5}{14}\vec{b}+\frac{9}{14}\vec{a}$.

$\overrightarrow{CH} = k\overrightarrow{CK}$ とおける

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{b} = 0$ より $\quad (k\overrightarrow{CK}-\vec{a})\cdot\vec{b} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{14}k\vec{b}+\frac{9}{14}k\vec{a}-\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{5}{14}k\cdot15^2+\frac{9}{14}k\times99-99 = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{11\times14}{224}$

$\therefore \overrightarrow{CH} = \frac{11\times14}{224}\left(\frac{5}{14}\vec{b}+\frac{9}{14}\vec{a}\right) = \frac{55}{224}\vec{b}+\frac{99}{224}\vec{a}$

(3). $|\overrightarrow{CK}|^2 = \frac{1}{14^2}|5\vec{b}+9\vec{a}|^2 = \frac{1}{14^2}\left(25\times15^2+81\times13^2+90\cdot99\right)$

$|\overrightarrow{CK}| = \frac{3}{14}\sqrt{3136} = \frac{3}{14}\sqrt{2^6\cdot7^2} = \frac{3\times8\times7}{14} = 12$

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\times12\times14 = 84$

外接円半径をRとして. $\triangle ABC = \frac{13\cdot14\cdot15}{4R}$ なので $R = \frac{65}{8}$

$\overrightarrow{CO} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とおくと

正射影ベクトルを用いて、$\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CO}}{|\overrightarrow{CB}|^2}\overrightarrow{CB}$, $\Leftrightarrow$ $15^2 = 2\vec{b}\cdot(s\vec{a} + t\vec{b})$

$\Leftrightarrow$ $15^2 = 2s\times 99 + 2t\times 15^2$ $\Leftrightarrow$ $25 = 22s + 50t$ …①

同様にCAに対するCOの正射影ベクトルより

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CO}}{|\overrightarrow{CA}|^2}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow 13^2 = 2\cdot\vec{a}\cdot(s\vec{a} + t\vec{b})$$

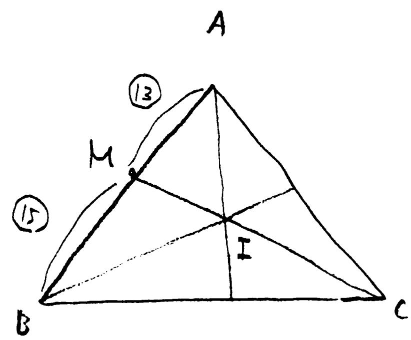
$\Leftrightarrow$ $13^2 = 2s\times 13^2 + 2t\times 99$ …②

①.②を連立.

$$t = \frac{169}{448} \qquad s = \frac{125}{448}$$

$$\overrightarrow{CO} = \frac{125}{448}\vec{a} + \frac{169}{448}\vec{b}$$

(4)



∠Cの二等分線とABの交点をMとする

AM:MB = 13:15 なので

$$\overrightarrow{CM} = \frac{13}{28}\vec{b} + \frac{15}{28}\vec{a}$$

$$AM = 14\times\frac{13}{28} = \frac{13}{2}$$

∠Aの二等分線とCMの交点がIなので

$CI : IM = AC : AM = 13 : \frac{13}{2} = 2 : 1$

よって $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} = \frac{13}{42}\vec{b} + \frac{15}{42}\vec{a} = \frac{5}{14}\vec{a} + \frac{13}{42}\vec{b}$

$$r\times\frac{13+14+15}{2} = \triangle ABC = 84$$

$$r = 4.$$

②

(1) 2つの控えめな有理数の和は控えめな有理数であることを示す ....(A)

題意より控えめな有理数は $\frac{l}{2m-1}$ のように表せる（m, lは整数）

$$\frac{l_1}{2m_1-1}+\frac{l_2}{2m_2-1}=\frac{(2m_2-1)l_1+(2m_1-1)l_2}{(2m_1-1)(2m_2-1)}$$

となるが、分母は奇数で、また分子は整数なので、これは控えめな有理数。

また2つの控えめな有理数の積もまた控えめな有理数であることを示す ...(B)

$$\frac{l_1}{2m_1-1}\times\frac{l_2}{2m_2-1}=\frac{l_1l_2}{(2m_1-1)(2m_2-1)}$$

分母は奇数で、分子は整数なので、成り立つ。

(A)および(B)より $S\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ の要素である $x_1a_1+\cdots+x_na_n$ は控えめな整数であることが分かる

(2). 控えめな有理数の分母は奇数なので、2つの奇数を用いて、必ず

$$a=\frac{(2l-1)\,2^k}{2m-1}$$ のように表すことができる。

したがって、$S\langle a\rangle$ の要素 xa は $\left(x\cdot\frac{2l-1}{2m-1}\right)\cdot 2^k$ となり、

$x\left(\frac{2l-1}{2m-1}\right)$ は控えめな有理数。すなわち、xa は $S\langle 2^k\rangle$ の要素である。

このとき、$S\langle 2^k\rangle$ の要素 $x'2^k$ も、先と同様に考えて、

$$x'2^k=\frac{(2l'-1)2^{k'}}{2m'-1}2^k=\frac{(2l'-1)(2m-1)2^{k'}}{(2m'-1)(2l-1)}\times\frac{(2l-1)2^k}{(2m-1)}$$

と表せるので $S\langle a\rangle$ の要素となっている。

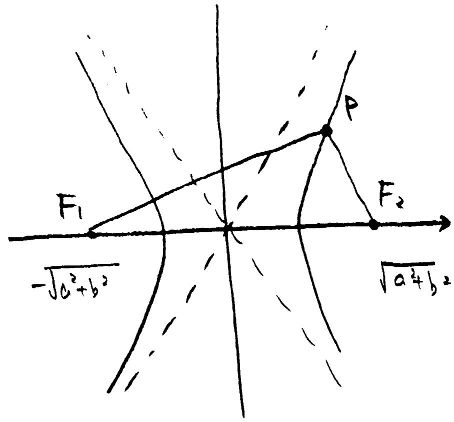
(3).

(4) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

$S\langle 2^t \rangle$ が 2016 を含むとすると $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$ に限られる (3) より $S\langle a_1 \dots a_n \rangle = S\langle b \rangle$ となる b が存在し、これは $b = 2^t$ と表せるので 2016 を要素にもつ集合は

$S\langle 2^0 \rangle$, $S\langle 2^1 \rangle$, $S\langle 2^2 \rangle$, $S\langle 2^3 \rangle$, $S\langle 2^4 \rangle$, $S\langle 2^5 \rangle$ の 6つ。

③ (1)



$F_1(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$, $F_2(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$

とおく。CとHの交点の1つをPとしたとき $PF_2 = r$ となっている。

このとき双曲線の定義から、$F_1P = 2a - r$

であり、Pは F_1 を中心とした半径 $2a-r$ の円周上に存在する。(この円を C' とする)

C と C' の共有点は $x > 0$ の範囲で高々2点なので

C と H の共有点も $x > 0$ の範囲で高々2点しか存在しない。

(2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$ を円の式に代入。

$$(x-s)^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 - r^2 = 0.$$

$$a^2(x-s)^2 + b^2x^2 - a^2b^2 - r^2a^2 = 0$$

$$(a^2+b^2)x^2 - 2a^2sx + a^2s^2 - a^2b^2 - r^2a^2 = 0$$

この式の左辺を $f(x)$ とすると、条件は、$y = f(x)$ のグラフが $x > a$ の範囲において異なる2つの交点をもつことに等しい。

$$f(x) = (a^2+b^2)\left(x^2 - \frac{2a^2s}{a^2+b^2}x\right) + a^2s^2 - a^2b^2 - r^2a^2$$

$$= (a^2+b^2)\left(x - \frac{a^2s}{a^2+b^2}\right)^2 - \frac{a^4s^2}{a^2+b^2} + a^2s^2 - a^2b^2 - r^2a^2$$

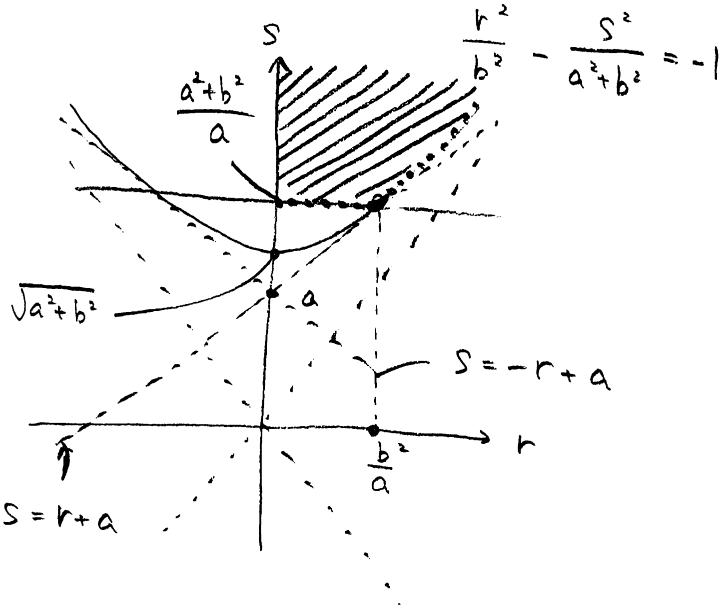
$$\begin{cases} \dfrac{a^2s}{a^2+b^2} > a, \quad f(a) = (a^2+b^2)a^2 - 2a^3s + a^2s^2 - a^2b^2 - r^2a^2 > 0 \\ -\dfrac{a^4s^2}{a^2+b^2} + a^2s^2 - a^2b^2 - r^2a^2 < 0 \end{cases}$$

整理すると、

$$\begin{cases} (s+r-a)(s-r-a)>0. & s>\dfrac{a^2+b^2}{a} \\ \dfrac{r^2}{b^2}-\dfrac{s^2}{a^2+b^2}>-1 \end{cases}$$

右図斜線部

(境界除く)



(3). (2)より

$$\frac{r^2}{b^2}-\frac{s^2}{a^2+b^2}=-1$$

かつ $r>\frac{b^2}{a}$ のとき

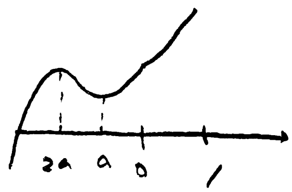
$$s=\sqrt{\left(\frac{r^2}{b^2}+1\right)(a^2+b^2)}$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{s}{r}=\lim_{r\to\infty}\sqrt{\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{r^2}\right)(a^2+b^2)}=\underline{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}}$$

④ (1) $f'(x) = 6x^2 - 18ax + 12a^2$

$= 6(x^2 - 3ax + 2a^2)$

$= 6(x-a)(x-2a)$



(i) $a<0$ のときは極値が $x \leqq 1$ の範囲にあり(右図)

$x \leqq 1$ において x と y が1対1に対応しない

(ii) $a=0$ のとき、$f'(x) = 6x^2$ となり、$f(x)$ は単調に増加するので

逆関数は存在する。

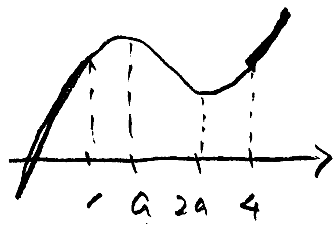
(iii) $a>0$ のとき

(i)と同様に $x=a, 2a$ が定義域内に存在すると x, y が1対1に対応しないので逆関数は存在しない。したがって、$1 \leqq a < 2a \leqq 4$ が必要となり、$1 \leqq a \leqq 2$.

このとき y に対する x が一意に定まるのは

$f(1) < f(4)$ となるときであり、

これより



$$2 - 9a + 12a^2 < 128 - 144a + 48a^2$$

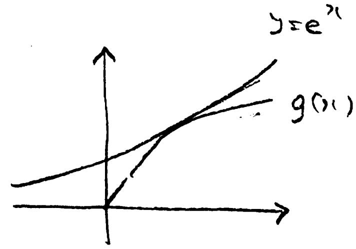
$$\Leftrightarrow \quad 4a^2 - 15a + 14 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (4a-7)(a-2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a < \frac{7}{4},\ a > 2$$

$1 \leqq a \leqq 2$ とあわせて、$1 \leqq a < \dfrac{7}{4}$

$\therefore\ a = 0$ または $1 \leqq a < \dfrac{7}{4}$



(2) $e^x - g(x) = h(x)$ とおく。

$$h'(x) = e^x - \frac{2b}{\sqrt{\sqrt{8x+1}-1}\,\sqrt{8x+1}}$$

となる。$h(x)=0$ が唯1つの解をもつとき、これを α とする

$g(x)$ が単調増加するのは明らかなので 1つの共有点をもつとき

$g(x)$ と e^x は接し、このとき $h'(\alpha)=0$ も成り立つ

$h(\alpha)=0$ より $\qquad e^{\alpha} = b\sqrt{\sqrt{8\alpha+1}-1} \quad \cdots ①$

$h'(\alpha)=0$ より $\qquad e^{\alpha} = \dfrac{2b}{\sqrt{\sqrt{8\alpha+1}-1}\,\sqrt{8\alpha+1}}$

連立して $\qquad b\sqrt{\sqrt{8\alpha+1}-1} = \dfrac{2b}{\sqrt{\sqrt{8\alpha+1}-1}\,\sqrt{8\alpha+1}}$

$b=0$ とすると、$g(x)=0$ となり明らかに共有点をもたないので $b\neq 0$.

$$(\sqrt{8\alpha+1}-1)\sqrt{8\alpha+1} = 2.$$

$$8\alpha+1-\sqrt{8\alpha+1} = 2.$$

$$8\alpha-1 = \sqrt{8\alpha+1}$$

$\alpha \leqq \frac{1}{8}$ のとき成立しないのは明らか（左辺 $\leqq 0$）なので両辺2乗して.

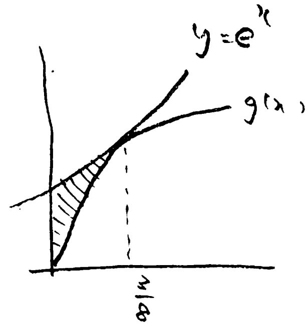
$$(8\alpha-1)^2 = 8\alpha+1 \qquad \left(\alpha > \tfrac{1}{8}\right)$$

$$(8\alpha-3)\alpha = 0$$

$$\alpha = 0,\ \frac{3}{8} \qquad \therefore\ \alpha = \frac{3}{8}$$

このとき ①より. $\qquad e^{\frac{3}{8}} = b \qquad \therefore\ \underline{b = e^{\frac{3}{8}}}$

(ii) $$S = \int_0^{\frac{3}{8}} e^x - e^{\frac{3}{8}}\sqrt{\sqrt{8x+1}-1}\,dx$$



$$\int_0^{\frac{3}{8}} e^x\,dx = e^{\frac{3}{8}} - 1$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{3}{8}} \sqrt{\sqrt{8x+1}-1}\,dx$ について $\sqrt{8x+1} = u$ として

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2}\times 8\,\dfrac{1}{\sqrt{8x+1}} = \dfrac{4}{u}$.

x	$0 \to \frac{3}{8}$
u	$1 \to 2$

$$\int_0^{\frac{3}{8}} \sqrt{u-1}\, dx = \int_1^2 \sqrt{u-1}\ \frac{u}{4}\, du$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ \left[\frac{2}{3} \times (u-1)^{\frac{3}{2}} \times u \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{3}(u-1)^{\frac{3}{2}}\, du \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ \frac{4}{3} - 0 - \left[\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times (u-1)^{\frac{5}{2}} \right]_1^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{4}{15}.$$

$$\therefore\ S = e^{\frac{3}{8}} - 1 - \frac{4}{15} e^{\frac{3}{8}} = \underline{\frac{11}{15} e^{\frac{3}{8}} - 1}$$