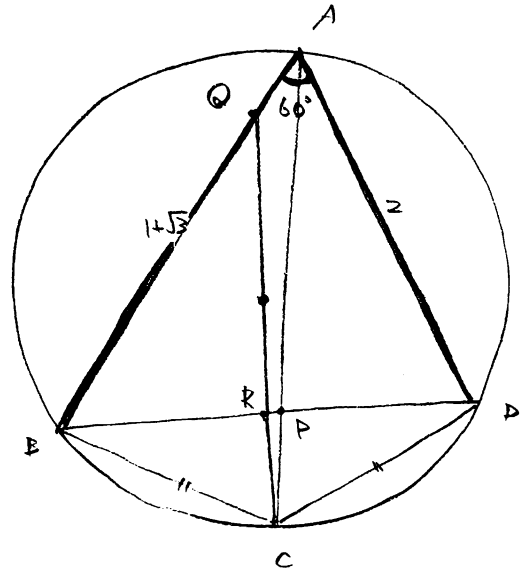
①

(1) △ABDで余弦定理

$$BD^2 = 2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})\cos 60^\circ$$
$$= 8 + 2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3}$$
$$= 6$$
$$\therefore \underline{BD = \sqrt{6}}$$



△ABDで正弦定理

$$\frac{BD}{\sin\angle BAD} = \frac{AD}{\sin\angle ABD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2}{\sin\angle ABD} \quad \Leftrightarrow \sin\angle ABD = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \angle ABD \underline{= 45^\circ}$$

BC=CDより△CBDは二等辺三角形

$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$より $\angle BCD = 120^\circ$なので $\angle CBD = \angle CDB = 30^\circ$

弧BCの円周角より、$\angle BAC = 30^\circ$、同様に$\angle DAC = 30^\circ$。

したがって、ACは∠BADの二等分線、なので、$BP : PD = AB : AD$

$$\therefore BP = \frac{AB}{AB+AD} \times BD = \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+2} \times \sqrt{6} = \underline{\sqrt{2}}$$

CQは∠BCDの二等分線で△BCDは二等辺三角形なので、

RはBDの中点でCQとBDは直交している。 $BR = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\therefore PR = BP - BR = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

△BRQは直角三角形で∠ABD=45°なので $BR = RQ = \frac{\sqrt{6}}{2}$

△QRPについて三平方の定理より

$$QP^2 = QR^2 + RP^2 = \frac{3}{2} + 2 + \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} = 5 - 2\sqrt{3}$$

△PQRの面積をS，内接円半径をrとして

$$S = \frac{1}{2}r(QR + RP + QP) = \frac{1}{2}PR \times QR$$

$$r = \frac{\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{5-2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - \frac{3}{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5-2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2}$$

(2)

(i) $n \equiv \pm 1 \pmod 3$ のとき $n^2 \equiv 1$

$n \equiv 0 \pmod 3$ 〃 $n^2 \equiv 0$

$$\sum_{k=1}^{2016}(a_n+b_n) = \sum_{k=1}^{672}\left(a_{3n-2}+b_{3n-2}+a_{3n-1}+b_{3n-1}+a_{3n}+b_{3n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{672}\left(1+1+2+1+0+0\right) = 5\times 672 = \underline{3360}_{\text{//}}$$

$m = 3l$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{3l}(a_{n+2}+b_{n+1}+2a_n) \leqq 2016$ を満たす最大の

l をもとめる

$$\sum_{n=1}^{3l}(a_{n+2}+b_{n+1}+2a_n) = \sum_{n=1}^{l}\left(a_{3l}+b_{3l-1}+2a_{3l-2}+a_{3l+1}+b_{3l}+2a_{3l-1}\right.$$
$$\left.+a_{3l+2}+b_{3l+1}+2a_{3l}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{l}\left(0+1+2\times1+1+0+2\times2+2+1+0\right)$$

$$= 11l \leqq 2016 \iff l \leqq 183$$

$$\sum_{n=1}^{3\times183}(a_{n+2}+b_{n+1}+2a_n) = 2013$$

$$a_{550+2}+b_{550+1}+2a_{550} = 0+1+2\cdot1 = 3.$$

$\therefore$ $m = 550$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{550}(a_{n+1}+b_{n+1}+2a_n) = 2016$

(3)

(i) $3x-4y+k=0$ より　$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}k$ を C の式に代入

$$\frac{x^2}{4}-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}k\right)^2=-1$$

$$\Leftrightarrow\quad 3x^2-6kx+48-k^2=0$$

判別式を D として

$$D/4=9k^2-3(48-k^2)=0 \qquad \underline{k=\pm 2\sqrt{3}}$$

$k=2\sqrt{3}$ のとき

$$3x^2-12\sqrt{3}x+36=0$$

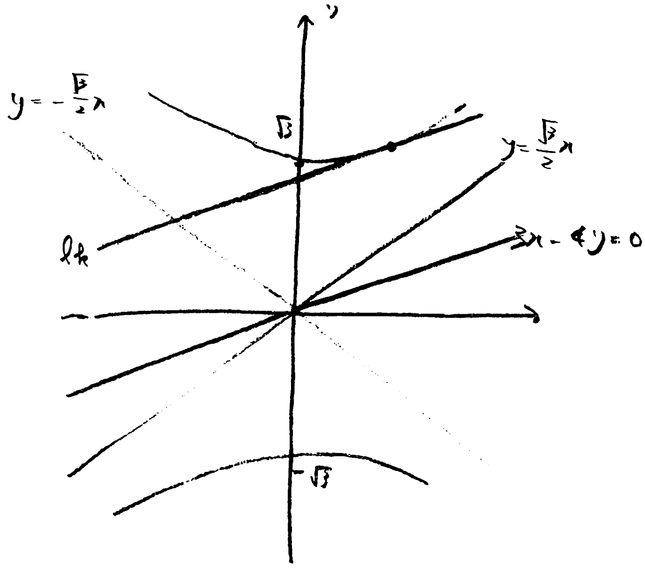
$$(x-2\sqrt{3})^2=0$$

l_k の式に $x=2\sqrt{3}$ を代入

$$6\sqrt{3}-4y+2\sqrt{3}=0$$

$$y=2\sqrt{3}$$

これは l_k が $(x,y)=(2\sqrt{3},2\sqrt{3})$ における接線であることを示している。



l_k と l_0 は平行なので、この接点と l_0 までの距離がもとめる最小値となっている。これを d_0 とすると

$$d_0=\frac{|3\times 2\sqrt{3}-4\times 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\underline{\frac{2\sqrt{3}}{5}}$$

② (1)

$x-t+1=s$ とおく. $\frac{ds}{dt}=-1$.

t	$1 \to x$
s	$x \to 1$

$$f(x)=\int_x^1 (x-s+1)se^{-s^2}(-ds)$$

$$=(x+1)\int_1^x se^{-s^2}ds-\int_1^x s^2e^{-s^2}ds$$

$$=(x+1)\left[-\frac{1}{2}e^{-s^2}\right]_1^x-\int_1^x s^2e^{-s^2}ds$$

$$=-\frac{1}{2}(x+1)e^{-x^2}+\frac{1}{2e}(x+1)-\int_1^x s^2e^{-s^2}ds$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+\frac{1}{2}(x+1)\times 2x\,e^{-x^2}+\frac{1}{2e}-x^2e^{-x^2}$$

$$=\frac{1}{2}(2x-1)e^{-x^2}+\frac{1}{2e}$$

(2) $h(x)=f(x)-g(x)$ とおく.

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=\frac{1}{2}(2x-1)e^{-x^2}+\frac{1}{2e}-xe^{-x^2}=-\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}-\frac{1}{e}\right)$$

$h'(x)=0$ となるのは $e^{-x^2}=\frac{1}{e}$ つまり, $x=1$ のとき.

$$h(1)=\int_1^1(2-s)se^{-s^2}ds+g(0)=0$$

よって $h(x)$ の増減は次のようになる

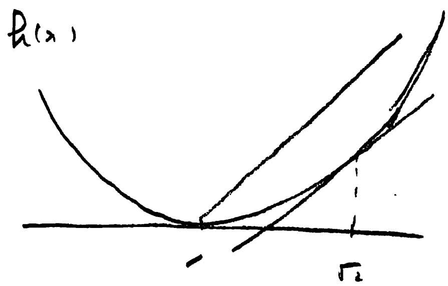
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって $x>0$ において $f(x)>g(x)$ であり, $f(x)$ の方が $g(x)$ よりも大きい.

(2) $h'(\sqrt{2}) = \dfrac{e-1}{2e^2}$

$(1,0)$を通って傾き$h'(\sqrt{2})$の直線は $y = \dfrac{e-1}{2e^2}x - \dfrac{e-1}{2e^2}$

$h''(x) = xe^{-x^2}$ で、$x>0$において $h(x)$は下に凸な関数



③

(1) PQの傾きは $\dfrac{t^2-(t^2-4t+2)}{t-(t-5)} = \dfrac{4t-2}{5}$

PQは $y=\dfrac{4t-2}{5}(x-t)+t^2 \quad (t-5 \leqq x \leqq t)$

$y=\dfrac{4t-2}{5}x+\dfrac{t^2+2t}{5} \quad (t-5 \leqq x \leqq t)$

(2) xを固定する

直線PQは $y=\frac{1}{5}\{t+(2x+1)\}^2-\frac{1}{5}(4x^2+6x+1)=f(x)$とおく

と変形できる。このときtの範囲は

$1 \leqq t \leqq 3$ かつ $x \leqq t \leqq x+5$

となるので、$x>3$ および $x<-4$ のときは対応するtが存在しないので

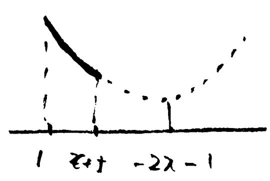
yも存在しないので、$-4 \leqq x \leqq 3$ の範囲で考える

(i) $1 \leqq x+5 \leqq 3$ のとき $(-4 \leqq x \leqq -2)$

tの範囲は $1 \leqq t \leqq x+5$

このとき$f(x)$の軸 $t=-2x-1$ は $3 \leqq -2x-1 \leqq 7$

となっているので $1 \leqq t \leqq x+5$ の範囲外にある



よって yの値は

$t=1$で最大、$t=x+5$で最小となる

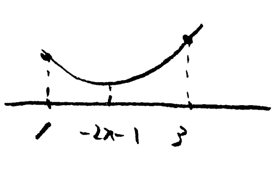
$x^2+6x+7 \leqq y \leqq \frac{1}{5}(2x+3)$

(ii) $x \leqq 1$ かつ $x+5 \geqq 3$のとき $(-2 \leqq x \leqq 1)$

このとき tの範囲は $1 \leqq t \leqq 3$.

$f(x)$の軸が範囲内にあるのは $1 \leqq -2x-1 \leqq 3 \iff -2 \leqq x \leqq -1$

(ii-1) $-2 \leqq x \leqq -1$のとき



$f(-2x-1) \leqq y \leqq \max\{f(1), f(3)\}$

$-\frac{1}{5}(4x^2+6x+1) \leqq y \leqq \max\{\frac{1}{5}(2x+3), 2x+3\}$