①

$s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ を満たす s, t が存在するとき、

$$s\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} sa+tc=e. & \cdots ① \\ sb+td=0 & \cdots ② \end{cases}$$

(i) $b\neq 0$ のとき

② より、$s=-\dfrac{d}{b}t$

これを ① に代入して、

$$\left(-\frac{ad}{b}+c\right)t=e$$

$$\Leftrightarrow \quad (ad-bc)t=-be \quad \cdots ③$$

③ は $ad-bc\neq 0$ のとき $t=\dfrac{-bc}{ad-bc}$ と変形でき、かつ、このとき、

$s=\dfrac{cd}{ad-bc}$ となるので、s, t が存在する。

$ad-bc=0$ のときは、③ は $be=0$ となるが、$b\neq 0$ なので

よって、$e=0$ のとき s, t は任意の実数値をとり、$e\neq 0$ のとき s, t は

存在しない。

まとめると、

$b\neq 0$，かつ $ad-bc\neq 0$．

または $b\neq 0$ かつ $ad-bc=0$ かつ $e=0$．

(ii) $b=0$ のとき

② より $td=0$．

ⓐ $d=0$ のとき t は任意の実数となり $b=d=0$ だから ② は任意の s, t について

成り立つ。このとき、A，B が原点ではないので、a, c はいずれも 0

ではなく、したがって ① を満たす s, t は必ず存在する。

ⓑ $d \neq 0$ のとき.

$td = 0$ より $t = 0$

このとき ① は $sa = e$ となるが, $b = 0$ だから $a \neq 0$ ($\because A \neq O$)

であり, s は存在する.

まとめると

$b = 0$ のとき, s, t は存在する.

(i)(ii) より,

$s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ が存在するための a, b, c, d, e の条件は,

$ad - bc = 0$ かつ $e = 0$

または $ad - bc \neq 0$ または $b = d = 0$

逆に $ad - bc = 0$ かつ $e = 0$ のとき $s = t = 0$ とすれば, $s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ が成り立つ.

$ad - bc \neq 0$ のとき $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は互いに1次独立なので,

$b = d = 0$ のとき $sa + tc = e$ を満たす s, t は明らかに存在する

ので $s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ を満たす s, t は存在する

以上より, $s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ を満たす s, t が存在するための, a, b, c, d, e の

必要十分条件は,

$$\begin{cases} ad - bc = 0 \text{ かつ } e = 0 \\ ad - bc \neq 0 \\ b = d = 0 \end{cases}$$

のいずれかが成り立つときである.

②

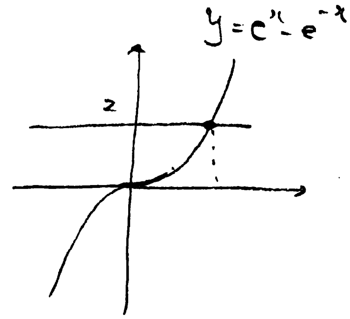
$t \cdot \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)-(1+x)=g(x)$ とおくと

(ア)は 任意のxについて $g(x)\geqq 0$ となることで、(イ)は $g(x)=0$と

なるxが存在することを示している.

$g'(x)=t\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}-1$,

$g'(x)=0 \iff t(e^x-e^{-x})=2$



ここで、 $y=e^x-e^{-x}$ のグラフの概形は

右のようになっているので、$g'(x)=0$となるxは

$x>0$の範囲に唯1つ存在する。これをαとすると

$$te^{\alpha}-te^{-\alpha}=2$$

$$\iff \quad e^{\alpha}=\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t} \quad \iff \quad \alpha=\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$$

したがって $g(x)$の増減は下のようになる

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↗

このことから、(ア),(イ)を満たすための条件は $g(x)$の極小値 $g(\alpha)$が0

であればよいことが分かる.

$$g(\alpha)=t\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}+f(t)-1-\alpha$$

$$=\frac{t}{2}\left(\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+\frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}\right)+f(t)-1-\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$$

$$=\sqrt{1+t^2}+f(t)-1-\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}=0 \quad \text{だから}$$

$$f(t) = \log \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t} + 1 - \sqrt{1+t^2}$$

③

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ とおく. $(x>0)$　　$\left(f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}<0\ なので\ f(x)は単調減少\right)$

$$\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^{40000}=2\times 40000^{\frac{1}{2}}-2=398$$

$$\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\sum_{k=1}^{39999}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\sum_{k=1}^{39999}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{40000}}$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{k}}>398+\frac{1}{200}\quad\cdots ①$$

$$\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\sum_{k=1}^{39999}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx>\sum_{k=1}^{39999}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{39999}\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\sum_{k=2}^{40000}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{k}}-1$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{k}}<398+1\quad\cdots ②$$

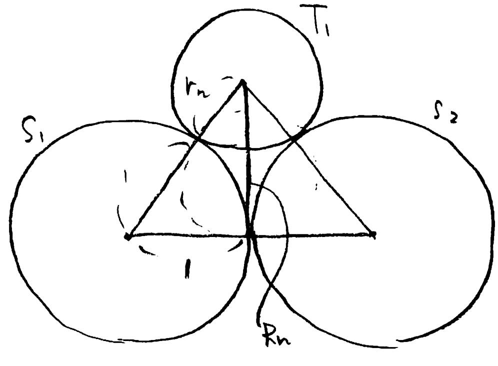
①, ② より

$$398+\frac{1}{200}<\sum_{k=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{k}}<399$$

よって $\sum_{k=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{k}}$ の整数部分は $\underline{398}$

④

(1) 右のように R_n を定めると、
$T_1 \sim T_n$ の中心は半径 R_n の
円上に存在することになる（右下図）

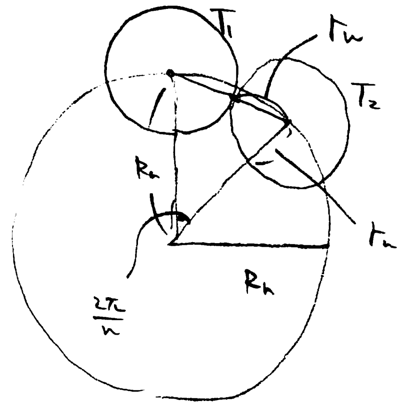


S_1, S_2, T_1 の中心を含む平面での切り口

右図より

$$(1+r_n)^2 = 1^2 + R_n^2 \quad \cdots ①$$

右下図より



$T_1 T_2 \ldots T_n$ の中心を含む平面での切り口.

$$R_n \sin\frac{\pi}{n} = r_n \quad \cdots ②$$

①.② より.

$$1 + 2r_n + r_n^2 = 1 + \frac{r_n}{\sin^2\frac{\pi}{n}}$$

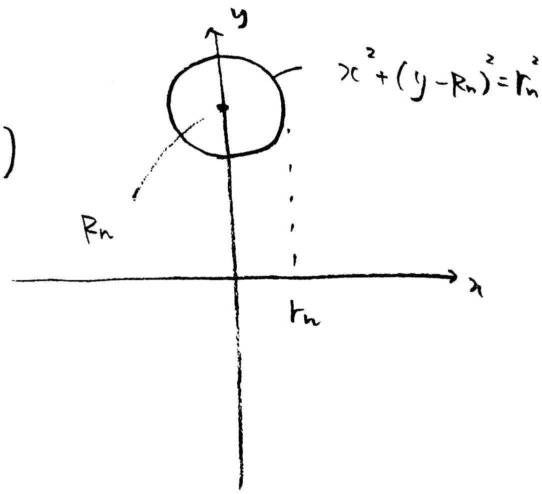
$$\left(1 - \sin^2\frac{\pi}{n}\right) r_n^2 - 2\sin^2\frac{\pi}{n}\, r_n = 0$$

$$\underline{r_n = 2\tan^2\frac{\pi}{n}}$$

(2) xy 平面上の円

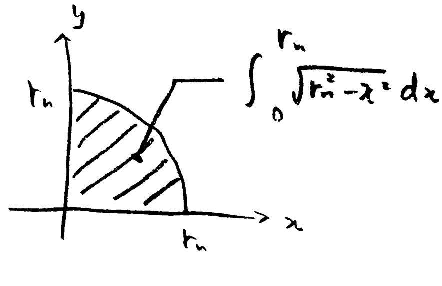
$$x^2 + (y - R_n)^2 = r_n^2 \quad \left(y = \pm\sqrt{r_n^2 - x^2} + R_n\right)$$

を x 軸のまわりに回転させる.



$$V_n = 2\int_0^{r_n} \pi\left(\sqrt{r_n^2 - x^2} + R_n\right)^2 dx - 2\int_0^{r_n} \pi\left(-\sqrt{r_n^2 - x^2} + R_n\right)^2 dx$$

$$= 8\pi \int_0^{r_n} R_n \sqrt{r_n^2 - x^2}\, dx$$



$$= 8\pi \frac{r_n}{\sin\frac{\pi}{n}} \times \frac{1}{4}\pi r_n^2$$

$$= \frac{2\pi^2 r_n^3}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$W_n = \frac{4}{3}\pi r_n^3 \times n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{W_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\cancel{2}\pi^2 \cancel{r_n^3}}{\sin\frac{\pi}{n}}}{2\,\frac{4}{3}\cancel{\pi}\cancel{r_n^3}\,n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3\pi}{2n\sin\frac{\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

5

(1) T_nが5で割りきれるのは 少なくとも1回は5の目が出たときで、5の目が一度も出ないときは、T_nは5で割りきれず、T_nを5で割った余りは 1,2,3,4のいずれかとなる.

したがって

$$p_n + q_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(2) T_nを5で割ったときの余りと、X_{n+1}について、T_{n+1} $(= T_n \times X_{n+1})$ を5で割った余りを表にまとめると次のようになる

		X_{n+1}の目					
		1	2	3	4	5	6
T_nを5で割った余り	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	2	3	4	0	1
	2	2	4	1	3	0	2
	3	3	1	4	2	0	3
	4	4	3	2	1	0	4

表より、$T_n \equiv 0$ (mod 5 以下全て同じ) のとき、$T_{n+1} \not\equiv 1$

$T_n \equiv 1$ のとき $X_{n+1} = 1$ または 6 で $T_{n+1} \equiv 1$

$T_n \equiv 2$のとき $X_{n+1} = 3$.　$T_n \equiv 3$のとき $X_{n+1} = 2$.

$T_n \equiv 4$のとき $X_{n+1} = 4$ で $T_{n+1} \equiv 1$

よって p_{n+1}は

$$p_{n+1} = \frac{2}{6}p_n + \frac{1}{6}q_n = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n - p_n\right)$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(3) (2) の結果の式の両辺に $\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}$ をかけると

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1} p_{n+1} = \frac{1}{6} \times \frac{6}{5} \times \left(\frac{6}{5}\right)^{n} p_n + \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n} \times \left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{5} r_n + \frac{1}{5}$$

$$r_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}\left(r_n - \frac{1}{4}\right)$$

$$r_n - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \times \left(r_1 - \frac{1}{4}\right)$$

$r_1 = \frac{6}{5} p_1 = \frac{6}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{5}$ なので.

$$r_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \times \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{3}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n} + \frac{1}{4}$$

$$p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n} r_n = \underline{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}}$$