① (1)

(i) 万〜十の位までは任意、一の位は 2 または 4

$4^4 \times 2 = \underline{512 \text{ 通り}}$

(ii) 各位の和が 9 の倍数となればよい。その組みあわせは

和が 9　(1, 1, 1, 2, 4), (1, 1, 1, 3, 3)

(1, 1, 2, 2, 3), (1, 2, 2, 2, 2)

和が 18　(2, 4, 4, 4, 4), (3, 3, 4, 4, 4)

の 6 組があり、それぞれ並べると

(1, 1, 1, 2, 4) … $\frac{5!}{3!} = 20$

(1, 1, 1, 3, 3), (3, 3, 4, 4, 4) … $\frac{5!}{3!2!} = 10$　(×2)

(1, 1, 2, 2, 3) … $\frac{5!}{2!2!} = 30$

(1, 2, 2, 2, 2), (2, 4, 4, 4, 4) … $\frac{5!}{4!} = 5$　(×2)

合計して　$20 + 10 \times 2 + 30 + 5 \times 2 = 80$　$\underline{80 \text{ 通り}}$

(iii) 22000 より小さい数を数える

1**** … $4^4 = 256$

21*** … $4^3 = 64$　合計 $256 + 64 = 320$

よって 22000 以上の数は　$4^5 - 320 = \underline{704 \text{ 通り}}$

(2) 5 桁の整数は $4^5 = 1024$ 通り

この中から重複を許して 2 つの数をとる組みあわせを考えればよいので

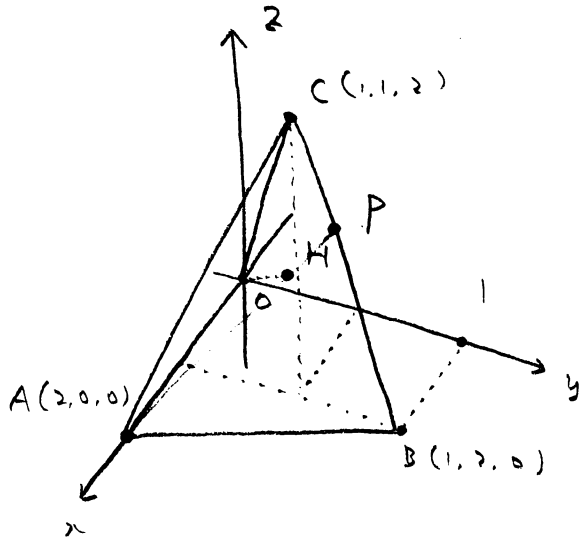
$${}_{1024}H_2 = {}_{1025}C_2 = \frac{1}{2} \times 1025 \times 1024 = 524800$$

②

(1) $OH = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$

としたとき、Hは平面ABC上にあるので

$s + t + u = 1$ …①



$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC}$ より

$$\begin{cases} (s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \\ (s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0. \end{cases}$$

$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$, $|\vec{c}| = \sqrt{6}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 2$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 3$

となるので上の2式は

$$2s - 4s + 5t - 2t + 3u - 2u = 0$$

$$-2s + 3t + u = 0 \quad \text{…②}$$

$$2s - 4s + 3t - 2t + 6u - 2u = 0$$

$$-2s + t + 4u = 0 \quad \text{…③}$$

①, ②, ③ を連立して $(s, t, u) = \left(\frac{11}{21}, \frac{2}{7}, \frac{4}{21}\right)$ //

(2) $$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = -\frac{10}{21}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{4}{21}\vec{c} = \frac{2}{7}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{4}{21}(\vec{c} - \vec{a})$$

$$= \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{21}\overrightarrow{AC} = \frac{10}{21}\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{10}{21}\overrightarrow{AP}$$

これはPがBCを2:3に内分していることを示している。

$BP : CP = 2 : 3$ //

(3) $$|\overrightarrow{AP}|^2 = \left|\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right|^2 = \frac{1}{25}\left|3\vec{b} - 3\vec{a} + 2\vec{c} - 2\vec{a}\right|^2$$

$$= \frac{1}{25}\left|5\vec{a}-3\vec{b}-2\vec{c}\right|^2 = \frac{1}{25}(100+45+24-60-40+36)$$

$$= \frac{105}{25} = \frac{21}{5}$$

$$\therefore \quad |\overrightarrow{AP}| = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{105}}{5}$$

③

(1) $\sqrt{x} = f(x)$, $\frac{1}{x} = g(x)$ と表す

$f(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

よって L_1 は $y = \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)+\sqrt{a} \iff \underline{y = \frac{1}{2\sqrt{a}}x + \frac{1}{2}\sqrt{a}}$ //

(2) C_2 と L_2 の接点の x 座標を b とする.

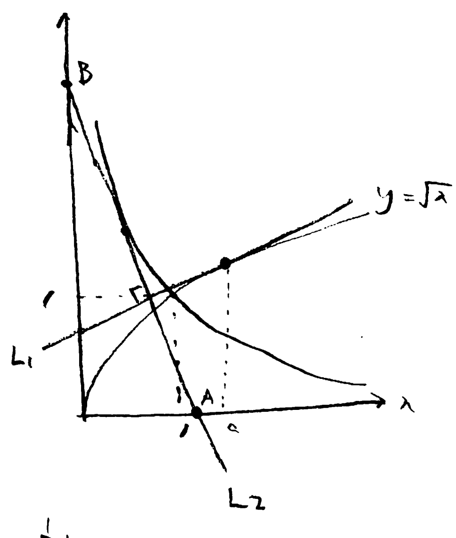
$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

よって L_2 は b を用いて, $y = -\frac{1}{b^2}(x-b)+\frac{1}{b} \iff y = -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b}$

L_1 と L_2 は直交するので. $\frac{1}{2\sqrt{a}} \times \left(-\frac{1}{b^2}\right) = -1 \iff b = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-\frac{1}{4}}$

$(\because x>0)$

よって L_2 は $\underline{y = -2\sqrt{a}\,x + 2\sqrt{2}\,a^{\frac{1}{4}}}$ //



(3)

A は L_2 と x 軸の交点.

$0 = -2\sqrt{a}\,x + 2\sqrt{2}\,a^{\frac{1}{4}}$

より $x = \frac{\sqrt{2}\,a^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2}}{a^{\frac{1}{4}}}$

$A(\sqrt{2}\,a^{-\frac{1}{4}}, 0)$

B は L_2 と y 軸との交点なので $B(0, 2\sqrt{2}\,a^{\frac{1}{4}})$

$l = \sqrt{2}\,a^{-\frac{1}{4}} + 2\sqrt{2}\,a^{\frac{1}{4}}$

相加平均 ≧ 相乗平均の公式より.

$l \geqq 2\sqrt{\sqrt{2}\,a^{-\frac{1}{4}} \times 2\sqrt{2}\,a^{\frac{1}{4}}} = 4$

等号は $\sqrt{2}\,a^{-\frac{1}{4}} = 2\sqrt{2}\,a^{\frac{1}{4}}$ すなわち. $a = \frac{1}{2}$ のとき.

∴ l の最小値は $a = \frac{1}{2}$ のときで, その値は 4.

④

(1) $f(x) = 1 + \int_0^x xf(t) - tf(t)\,dt$ ..... (*)

$f(x) = 1 + x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt$

この式の両辺をxで微分する.

$f'(x) = \int_0^x f(t)\,dt + xf(x) - xf(x)$

$= \int_0^x f(t)\,dt$ ..... (**)

両辺をxで微分する

$f''(x) = f(x)$ ... ①

よって $\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$ は

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)}$$

$$= \frac{f'(x)+f(x)}{f(x)+f'(x)} \quad (\because ①)$$

$$= \underline{1}$$ //

(2) $\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = 1$ の両辺をxで積分すると

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\,dx = \int 1\,dx$$

$\log \phi(x) = x + C$. (Cは積分定数)

$\phi(x) = e^{x+C}$ ... ②

ここで (*) で $x=0$ とすると

$f(0) = 1 + 0 = 1$

(＊＊) で $x=0$ とすると

$$f'(0)=0$$

となるので

$$\phi(0)=f(0)+f'(0)=1$$

よって ② で $x=0$ としたとき

$$\phi(0)=e^{0+C}=e^{C}=1$$

よって $$\phi(x)=e^{x}$$

すなわち $$f(x)+f'(x)=e^{x}$$

両辺を e^{x} 倍する。

$$e^{x}f(x)+e^{x}f'(x)=e^{2x}$$

$$(e^{x}f(x))'=e^{2x}$$

両辺を積分すると、

$$e^{x}f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C.$$ (Cは積分定数)

$x=0$ とすると

$$f(0)=\frac{1}{2}+C$$

$$C=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

となるので

$$e^{x}f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}$$

$$\underline{f(x)=\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}}$$