① (1) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx$

$$= \int_0^1 x' \log(1+x^2)\,dx$$

$$= \Big[x\log(1+x^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 x\,\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \log 2 - \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \log 2 - 2 + \int_0^1 \frac{2}{1+x^2}\,dx$$

ここで $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{1+x^2}\,dx$ について　$x=\tan\theta$ と置換する

$$\left(\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta},\quad \begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array} \right)$$

$$\int_0^1 \frac{2}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

よって

$$\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx = \underline{\log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}}$$

(2) $\displaystyle f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$f'(x)=0$ となるのは $x^2=1$ すなわち

$x=\pm 1$ のとき。$f(x)$ の増減は

右のようになる

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

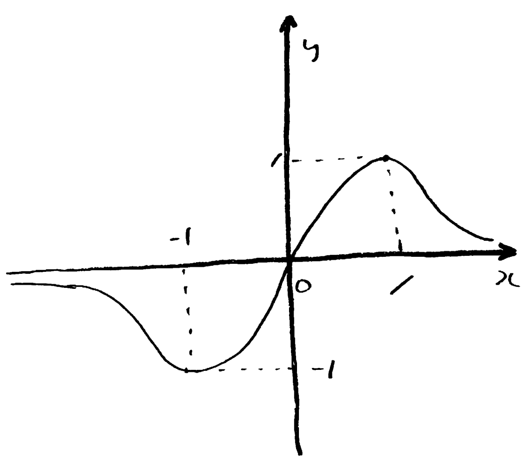
また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}+x} = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1+x^2} = 0$

だから、$f(x)$ のグラフの概形は

右のようになる

$(f(1)=1,\ f(-1)=-1)$



(3) (2)より $-1 \leqq f'(x) \leqq 1$ …①

$x=\alpha$、および $x=\beta$ における接線が互いに直交しているものとすると。
($\alpha<\beta$ とする)

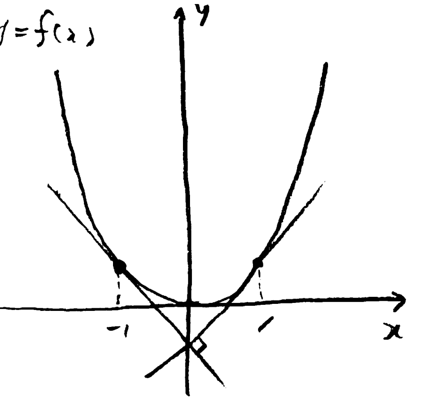
$f'(\alpha)\times f'(\beta)=-1$ となるが、①より、これを満たす α, β は、

$$f'(\alpha)=-1,\ f'(\beta)=1$$

のとき、すなわち、

$$\alpha=-1,\ \beta=1$$

のときに限られる



また $f'(x)$ は $x<0$ のとき負、$x=0$ のとき 0、$x>0$ のときに正の値をとり、

$$f(0)=\log 1=0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$$

となることから、$f(x)$ のグラフの概形および2本の接線は右上のようになる。また、2接線の式は

$$y=f'(\pm1)(x\mp1)+f(\pm1)$$

$$\Leftrightarrow\quad y=x+\log 2-1,\quad y=-x+\log 2+1$$

$f(x)=f(-x)$ が成り立つので $f(x)$ が偶関数だから

$$S=2\int_0^1 \log(1+x^2)-(x+\log 2-1)\,dx$$

$$=2\left(\log 2-2+\frac{\pi}{2}\right)-2\left[\frac{1}{2}x^2+(\log 2-1)x\right]_0^1$$

$$=2\log 2-4+\pi-1-2\log 2+2$$

$$=\pi-3$$

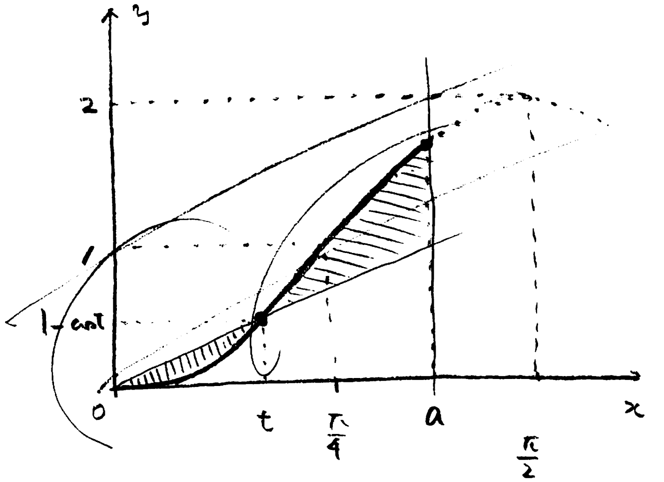
② (1) $y=1-\cos x$ のグラフは

左のようになる。

$(t,\ 1-\cos t)$ を通る直線は

$y=\dfrac{1-\cos t}{t}x$

となるので



$S_1(t)+S_2(t)$

$$=\int_0^t \frac{1-\cos t}{t}x-(1-\cos x)\,dx+\int_t^a (1-\cos x)-\frac{1-\cos t}{t}\,dx$$

$$=\left[\frac{1-\cos t}{2t}x^2-x+\sin x\right]_0^t+\left[\frac{1-\cos t}{2t}x^2-x+\sin x\right]_a^t$$

$$=2\left(\frac{1}{2}t(1-\cos t)-t+\sin t\right)-\frac{1-\cos t}{2t}a^2+a-\sin a$$

$$=2\sin t-t-t\cos t-\frac{1-\cos t}{2t}a^2+a-\sin a$$

(2) $S_1(t)+S_2(t)=f(t)$ とおく

$$f'(t)=+2\cos t-1-\cos t+t\sin t-\frac{2t\sin t-2(1-\cos t)}{4t^2}a^2$$

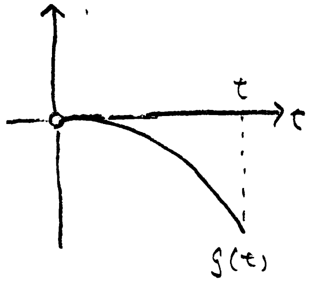
$$=\cos t+t\sin t-1-\frac{a^2}{2t^2}(\cos t+t\sin t-1)$$

$$=\frac{1}{2t^2}(\cos t+t\sin t-1)(2t^2-a^2)$$

ここで $g(t)=\cos t+t\sin t-1$ とすると、

$g'(t)=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$

$g(0)=1+0-1=0$



となり、$0<t<a\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $g'(t)\leqq 0$ と

なるので $g(t)<0$

したがって $f'(t)=0$ となるのは $2t^2-a^2=0$ すなわち $t=\frac{1}{\sqrt{2}}a$ の

ときに限られる ($\because$ $0<t<a$ なので $t\neq-\frac{1}{\sqrt{2}}a$)　以上より、$t_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

(3) $S_1(t_0) - S_2(t_0)$

$$= \int_0^{t_0} \frac{1-\cos t_0}{t_0}x - (1-\cos x)\,dx - \int_{t_0}^{a} (1-\cos x) - \frac{1-\cos t_0}{t_0}\,dx$$

$$= \int_0^{a} \frac{1-\cos t_0}{t_0}x - (1-\cos x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1-\cos t_0}{2t_0}x^2 - x + \sin x\right]_0^a$$

$$= \frac{1-\cos\frac{\sqrt{2}}{2}a}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a}a^2 - a + \sin a = \frac{1-\cos\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{2}}a - a + \sin a$$

$$\frac{S_1(t_0)-S_2(t_0)}{a^3} = \frac{1-\cos\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{2}a^2} + \frac{\sin a - a}{a^3}$$

$$= \frac{1-1+2\sin^2\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\sqrt{2}a^2} + \frac{\sin a - a}{a^3}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2a^2}\times\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sin a - a}{a^3}$$

ここで、条件より $-\frac{a^3}{3!} < \sin a - a < -\frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!}$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3!} < \frac{\sin a - a}{a^3} < -\frac{1}{3!} + \frac{a^2}{5!}$$

なので、はさみうちの原理より

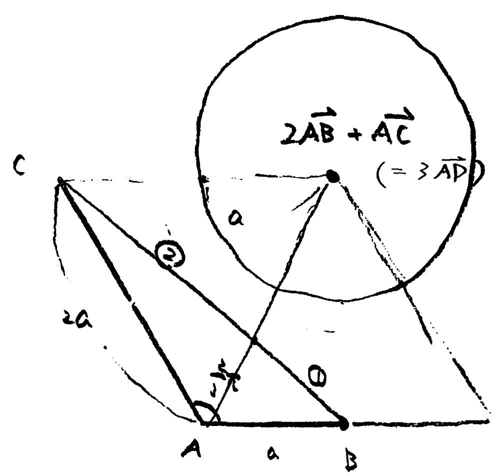
$$\lim_{a\to+0}\frac{\sin a - a}{a^3} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

よって $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{S_1(t_0)-S_2(t_0)}{a^3} = \lim_{a\to+0}\left\{\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\frac{\sqrt{2}}{4}a}\right)^2\times\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sin a - a}{a^3}\right\} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{6}}$

③ $\left|2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP}\right| = a$

$\Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}\right| = a$

$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AP} - (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\right| = a \quad \cdots (*)$



(1) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$|\overrightarrow{AD}|^2 = \frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{9}\times 4a^2 + \frac{4}{9}\times a^2 + \frac{4}{9}\times a \times 2a \times \cos\frac{2}{3}\pi$

$= \frac{4}{9}a^2$

$\therefore\ |\overrightarrow{AD}| = \frac{2}{3}a$

(2) (*)より

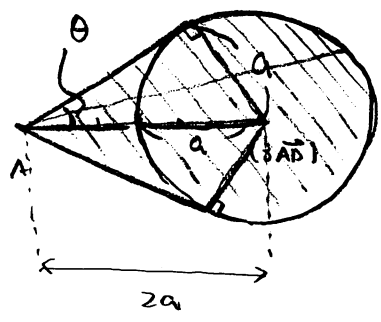
$|\overrightarrow{AP} - 3\overrightarrow{AD}| = a$.

よって $|3\overrightarrow{AD}| - a \leqq |\overrightarrow{AP}| \leqq |3\overrightarrow{AD}| + a$

すなわち $2a - a \leqq |\overrightarrow{AP}| \leqq 2a + a = 3a$.

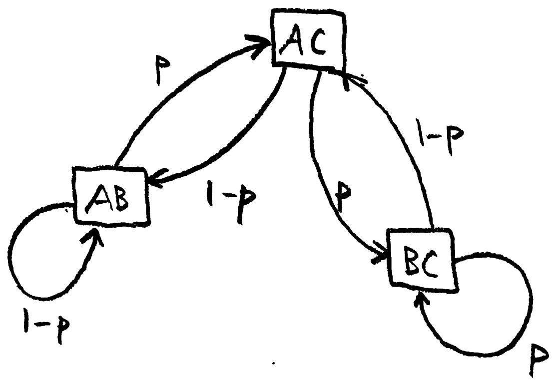
よって $|\overrightarrow{AP}|$の最大値は $3a$

(3) Pは中心$3\overrightarrow{AD}$，半径aの円周上を動き $|3\overrightarrow{AD}| = 2a$ となっていることから線分APの描く領域は右のようになる。右図中のθは $a : 2a : \sqrt{3}a$ の直角三角形から $\theta = \frac{\pi}{6}$ であることがわかるので，もとめる面積は

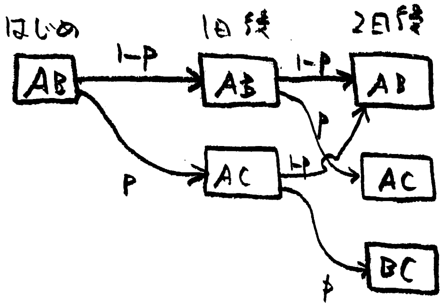


$S = \pi \times a^2 \times \frac{\frac{4}{3}\pi}{2\pi} + \frac{1}{2}\times 2a \times \sqrt{3}a \times \frac{1}{2}\times 2 = \frac{2}{3}\pi a^2 + \sqrt{3}a^2$

④ 部屋A,Bに象がいることを $\boxed{AB}$ などと表すことにする。
問題の条件を図にまとめると下のようになる



(1)



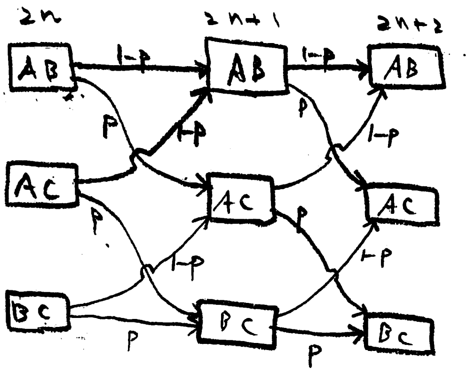
左図より

$$a_1 = (1-p)\times(1-p) + p\times(1-p) + (1-p)\times p$$

$$= \underline{1-p^2}$$

(2) 2n日後 $\boxed{AB}$ となる確率を α_n

$\boxed{AC}$ となる確率を β_n, $\boxed{BC}$ となる確率を γ_n とすると、



$$\alpha_{n+1} = (1-p)(1-p)\alpha_n + p(1-p)\alpha_n + (1-p)(1-p)\beta_n + (1-p)(1-p)\gamma_n$$

$$= (1-p)\alpha_n + (1-p)^2\beta_n + (1-p)^2\gamma_n$$

$$\beta_{n+1} = (1-p)p\alpha_n + (1-p)p\beta_n + p(1-p)\beta_n + p(1-p)\gamma_n$$

$$= p(1-p)\alpha_n + 2p(1-p)\beta_n + p(1-p)\gamma_n$$

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} + \beta_{n+1}$$

$$= (1-p^2)\alpha_n + (1-p^2)\beta_n + (1-p)\gamma_n$$

$$= (1-p^2)\alpha_n + (1-p^2)\beta_n + (1-p)(1-\alpha_n-\beta_n)$$

$$= p(1-p)\alpha_n + p(1-p)\beta_n + 1-p$$

$$= p(1-p)(\alpha_n+\beta_n) + 1-p$$

$$= p(1-p)a_n + 1-p.$$

$$\therefore \ \underline{a_{n+1} = p(1-p)a_n + 1-p}$$

(3) $p = \frac{2}{3}$ のとき

$$a_{n+1} = \frac{2}{9}a_n + \frac{1}{3} \quad \left(a_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} - \frac{3}{7} = \frac{2}{9}\left(a_n - \frac{3}{7}\right)$$

$$a_n - \frac{3}{7} = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{7}\right)$$

$$\underline{a_n = \frac{4}{7}\left(\frac{2}{9}\right)^n + \frac{3}{7}}$$